2026後期

均衡分析と数理最適化　第５講

ベクトル場の幾何と可積分性

京都大学経済研究所　大澤 実

本講の目的

ベクトル場 F の局所的・大域的な構造を調べる.

1. Jacobian を対称成分と反対称成分に分解し, 伸縮成分と回転成分として解釈する.
2. 可積分性（ポテンシャルの存在条件）を理解する.
3. 単調性を使った解集合の性質の特徴づけを議論する.
4. 発展として，大域的な Helmholtz–Hodge 分解とゲームの分解を議論する.

復習

変分包含と変分不等式：K を凸集合として

$$\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

- 第2講：K の性質
- 第3講：$F = \nabla f$ なる場合（最適化問題の一次の必要条件）
- 第4講：一般の F と VI・NCP・FP
- 本講：F の性質



ベクトル場の局所的な幾何

Jacobi 行列と近傍での一次近似

$D \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 級ベクトル場 $F : D \to \mathbb{R}^n$ を考える.

定義 F の **Jacobi 行列** は

$$JF(x) = \left[\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{n}$$

であって小さな変化 h に対して $F(x+h) - F(x) = JF(x)h + o(\|h\|)$ なる量.

- 第 j 列：変数 x_j を動かしたとき，各成分 F_i がどう変わるか.
- $F = \nabla f$ なら $JF = \nabla^2 f$ は Hesse 行列.
- affine 場 $F(x) = Mx + q$ なら $JF(x) = M$ は一定.

対称成分と反対称成分

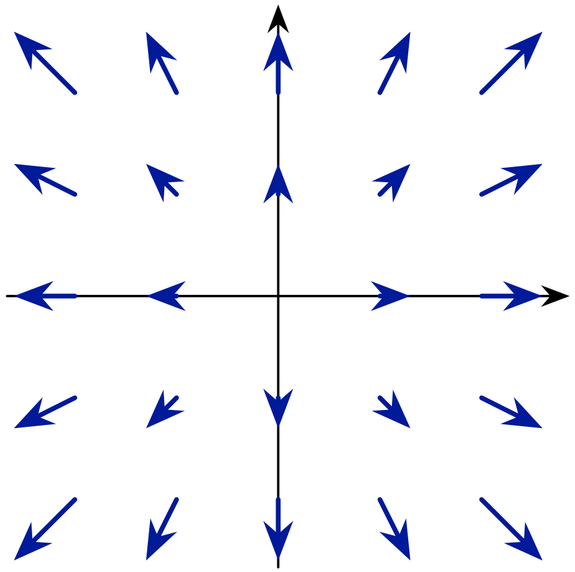
任意の正方 Jacobi 行列は以下のように一意に分解可能：$JF(x) = S(x) + A(x)$ ただし

$$S(x) = \frac{JF(x) + JF(x)^\top}{2} \quad \text{and} \quad A(x) = \frac{JF(x) - JF(x)^\top}{2}$$

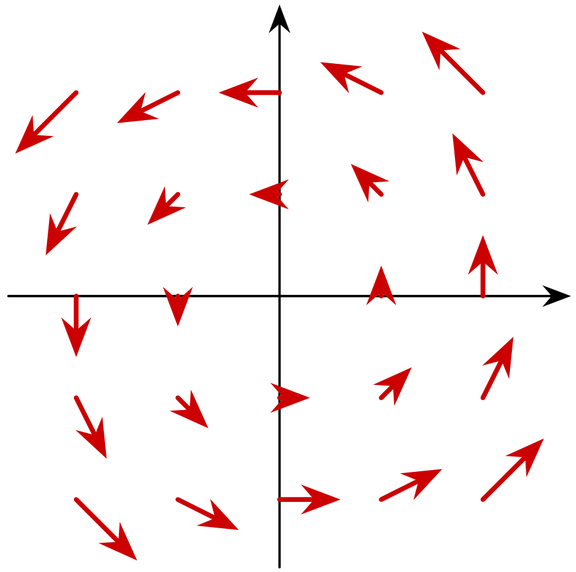
- $S(x)^\top = S(x)$ であり，**対称成分**と呼ぶ．方向ごとの伸縮・散逸・増幅を表す．
- $A(x)^\top = -A(x)$ であり，**反対称成分**と呼ぶ．局所的な回転・循環を表す．
- 任意の h に対して $h^\top A(x)h = 0$ なので $h^\top JF(x)h = h^\top S(x)h$.

✍ ここから，非対称行列に対する定値性を対称成分についてのそれとして定義する流儀がある．

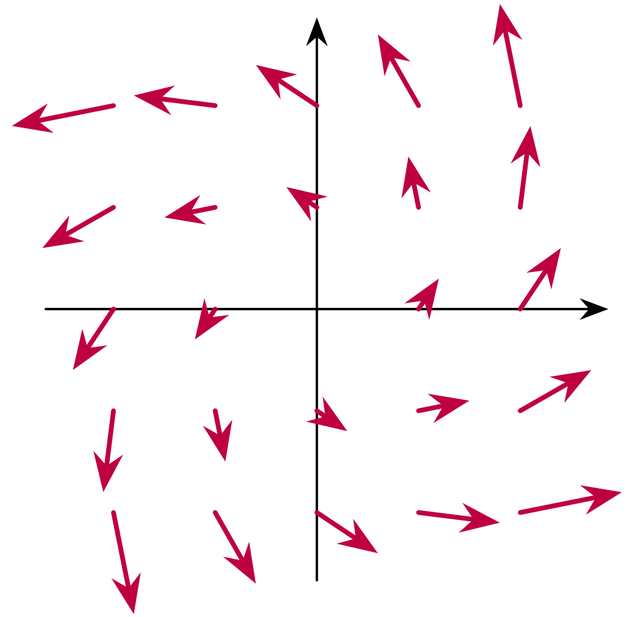
単純な線形ベクトル場



$F(z) = z$：外向き



$F(z) = Jz$：回転



$F(z) = (I + J)z$：螺旋

$$F(z) = (\mu I + \omega J)z, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



可積分性とポテンシャル関数

ポテンシャル関数の定義

まず $D \subset \mathbb{R}^n$ を**開凸集合**とする.

定義 C^1 級関数 $\phi : D \to \mathbb{R}$ が

$$F(x) = \nabla\phi(x) \qquad (x \in D)$$

を満たすとき，F は **積分可能** (integrable)，ϕ を (scalar) **potential** と呼ぶ.

- ポテンシャルは定数を除いて一意.
- F の n 成分が，一つのスカラー関数の傾きとして整合している.
- $F = \nabla\phi$ でも ϕ が凸とは限らない.

可積分性の判定：Jacobi 行列の対称性

定理 開凸集合 D 上の C^1 級ベクトル場 F について，次は **同値**：

1. $F = \nabla\phi$ となる ϕ が存在する.
2. $JF(x) = JF(x)^{\top}$ が全ての $x \in D$ で成立する.
3. 任意の閉曲線 $\gamma \subset D$ に沿った **線積分** について $\oint_{\gamma} \langle F, \mathrm{d}z \rangle = 0$.

- 必要性：$JF = \nabla^2\phi$ なので交差偏微分が等しい.
- 十分性：凸領域では2点を結ぶ線分に沿って ポテンシャルを構成できる.

✍ 2次元空間で e_i, e_j 方向に辺長 δ_i, δ_j の長方形を反時計回りに一周する線積分を考えると一次近似では $\oint \langle F(z), \mathrm{d}z \rangle = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \delta_i \delta_j + o(\delta_i \delta_j)$

ポテンシャルがある VI は最適化の一次条件

$K \subset D$ を非空凸集合，$F = \nabla\phi$ とすると

$$\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{0} \in \nabla\phi(x) + N_K(x).$$

- 右辺は $\min_{y \in K} \phi(y)$ の一次条件.
- ϕ が非凸なら，VI 解は停留点であり，局所最小点とは限らない.
- ϕ が K 上で凸なら，VI 解 $=$ 大域的最小解.
- ϕ が K 上で狭義凸なら，解は存在すれば一意.

✍ ポテンシャルの存在 $\neq$ 問題の凸性であることに注意.

affine 場の可積分性

$F(x) = Mx + q$ では $JF = M$ だから

$$F \text{ が可積分} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla F \text{ が対称} \quad \Longleftrightarrow \quad M = M^\top.$$

対称なら

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^\top M x + q^\top x \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \phi(x) = Mx + q.$$

- ✍ $\Rightarrow$ であるのはなぜか.
- $M \succeq 0$: ϕ は凸，$M \succ 0$: ϕ は強凸.
- M が対称でも不定値なら，ポテンシャルはあるが凸ではない.
- M が非対称なら，一般に一つの目的関数へはまとめられない.

可積分な場の典型例

1. **分離可能な場**

$$F_i(x) = f_i(x_i) \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \sum_i \int_0^{x_i} f_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

2. **対称な線形相互作用**

$$F(x) = Mx + q, \quad M = M^\top \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \tfrac{1}{2} x^\top M x + q^\top x.$$

3. Logit/softmax

$$F_i(x) = \frac{e^{x_i}}{\sum_j e^{x_j}} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \log\Big(\sum_j e^{x_j}\Big).$$

問 それぞれについて $\partial F_i/\partial x_j = \partial F_j/\partial x_i$ を確認せよ.

ネットワーク均衡モデル

リンク費用が分離可能で $c_e = c_e(f_e)$ なら，リンクコスト場に対応するポテンシャルは

$$\Phi(f) = \sum_e \int_0^{f_e} c_e(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \nabla\Phi(f) = c(f).$$

- $c_e' \geq 0$ なら Jc は半正定値：Φ は凸，c は単調.
- $c_e' > 0$ ならリンクフローに関して狭義凸性・一意性が期待できる.
- 非分離費用 $c_e(f)$ では，$\partial c_e/\partial f_{e'} = \partial c_{e'}/\partial f_e$ が可積分性の条件.
- 交差効果が非対称なら VI は定義できるが，ポテンシャルは一般に存在しない.

✍ 今後の講義で詳しく扱う.



単調性

三種類の単調性

定義 凸集合 K 上の $F : K \to \mathbb{R}^n$ を考える.

$$
\begin{aligned}
&\text{単調} &&: \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0 && \forall x, y \in K, \\
&\text{狭義単調} &&: \langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0 && \forall x \neq y, \\
&\text{強単調} &&: \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq m\|x - y\|^2 && \forall x, y \in K, \exists m > 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{強単調} \implies \text{狭義単調} \implies \text{単調}
$$

問 ポテンシャルがある場合，単調性が対応する凸性と等価であることを確認せよ.

狭義単調性と強単調性

1次元で $F(t) = t^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^4/4)$ を考える.

- $t^4/4$ は狭義凸なので，F は狭義単調.
- しかし $F'(0) = 0$ であり，$F'(t) \geq m > 0$ となる一様な m は存在しない.
- 従って F は強単調ではない.

Jacobi 行列の正定値性は狭義単調性の**十分条件**だが，一般には必要条件ではない.

✍ affine 場では Jacobi 行列が一定なので，方向空間上の正定値性は強単調性まで与える.

微分による単調性の判定

D をアフィン空間 $x^0 + L$ 内の相対的に開な凸集合とし，F はその近傍で C^1 とする.

$$
\begin{aligned}
F \text{ が } D \text{ 上で単調} &\iff h^\top S(x) h \geq 0 && \forall x \in D,\ \forall h \in L, \\
F \text{ が } D \text{ 上で強単調} &\iff h^\top S(x) h \geq m\|h\|^2 && \forall x \in D,\ \forall h \in L, \exists m > 0.
\end{aligned}
$$

- $h^\top A h = 0$ゆえこの二次形式には A が現れない.
- 低次元の K では，全空間でなく方向空間 $L = \mathrm{span}(K - K)$ 上で判定 (c.p.d.).

affine 場の単調性

$F(x) = Mx + q$, $M = S + A$ とする. $x - y = h \in L$ なら

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle = h^\top M h = h^\top S h.$$

従って

$$F \text{ が } K \text{ 上で単調} \quad \Longleftrightarrow \quad h^\top S h \geq 0 \quad \forall h \in L.$$

- S が L 上で正定値なら強単調.
- A の大きさは F の単調性を変えない.
- しかし A は収束性などに影響する可能性がある.

狭義単調性と解の一意性

定理 F が狭義単調 $\Longrightarrow$ VI の解は存在すれば一意.

x, y がともに VI(K, F) の解とする．それぞれの y, x を代入すると

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0, \qquad \langle F(y), x - y\rangle \geq 0.$$

足し合わせて

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \leq 0.$$

一方，F が狭義単調なら $x \neq y$ のとき左辺は正．矛盾.

これ以外にも最適化問題の場合と同様の結果が成立する.

VIの解の存在と一意性

	代表的な十分条件
解の存在	K 非空コンパクト凸，F 連続
解集合が閉凸	K 閉凸，F 連続かつ単調
存在する場合の一意性	F 狭義単調
存在および一意性	K 非空閉凸，F 連続かつ強単調

- ポテンシャルの有無はこの表のどの行とも独立であることに注意.
- 単調であっても，非有界集合では追加条件なしに存在を結論できない.
- 十分条件：例えば，単調でなくても特定の問題が一意解を持つことはある.

🚲 簡単な例：affine VI

散逸と回転を二つの parameter に分ける

$$F_{\mu,\omega}(z) = (\mu I + \omega J)z - q, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- μ：対称成分．$\mu > 0$ なら散逸・強単調性.
- ω：反対称成分．$\omega \neq 0$ なら回転・非可積分性.
- q：原点 (center) を移す外生項.

$$JF_{\mu,\omega} = \mu I + \omega J, \qquad S = \mu I, \qquad A = \omega J.$$

構造の分類

性質	条件
可積分	$\omega = 0$
回転成分あり	$\omega \neq 0$
単調	$\mu \geq 0$
強単調	$\mu > 0$

- $\mu > 0, \omega = 0$：強凸二次関数の勾配.
- $\mu = 0, \omega \neq 0$：単調だが非可積分な純回転.
- $\mu > 0, \omega \neq 0$：強単調だが非可積分な螺旋型.
- $\mu < 0$：反単調な増幅成分を持つ.

全空間の場合

$K = \mathbb{R}^2$ なら VI は $F_{\mu,\omega}(z) = \mathbf{0}$. $\mu^2 + \omega^2 > 0$ なら

$$z^* = (\mu I + \omega J)^{-1} q = \frac{\mu I - \omega J}{\mu^2 + \omega^2} q.$$

- 純回転 $\mu = 0, \omega \neq 0$ でも解は一意.
- したがって「狭義単調でない $\Rightarrow$ 複数解」ではない.
- 狭義単調性は**一意性の十分条件**（個別問題依存の行列の可逆性を調べずに使える）.

回転成分がある場合

この F について，$q = \mathbf{0}$ とし，半径 r の円 $z(t) = r(\cos t, \sin t)$ を反時計回りに一周する線積分を考えてみよう.

この経路上で $\dot{z} = Jz$ なので

$$\oint \langle F_{\mu,\omega}(z), \mathrm{d}z \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mu z + \omega J z, Jz \rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \omega r^2 \, \mathrm{d}t = 2\pi\omega r^2.$$

- μz は半径方向なので一周の仕事はゼロ.
- $\omega J z$ は接線方向なので循環が残る.
- $\omega \neq 0$ なら path independent な ポテンシャルは存在しない.

同値な FP に基づく反復法の収束性

全空間での更新 $z^{k+1} = z^k - \eta F(z^k)$ を考える．解からの誤差 $\epsilon^k = z^k - z^*$ は

$$\epsilon^{k+1} = ((1 - \eta\mu)I - \eta\omega J)\epsilon^k$$

を満たす．従って

$$\frac{\|\epsilon^{k+1}\|}{\|\epsilon^k\|} = \sqrt{(1 - \eta\mu)^2 + (\eta\omega)^2}.$$

- 純回転 $\mu = 0, \omega \neq 0$ では任意の $\eta > 0$ で倍率が 1 より大きい.
- $\mu > 0$ なら $0 < \eta < 2\mu/(\mu^2 + \omega^2)$ で縮小.
- 回転が強いほど許される刻み幅 η は小さくなる.

✍ 解の一意性 $\neq$ gradient 型の反復法の収束性.



単体上のベクトル場

単体上の接方向でみた性質

$K = \Delta_n$ の方向空間と直交射影は

$$L = \{h : \langle \mathbf{1}, h \rangle = 0\}, \qquad P = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top.$$

VI の内積では $y - x \in L$ なので

$$\langle F(x), y - x \rangle = \langle PF(x), y - x \rangle.$$

- $F(x)$ に $\alpha(x)\mathbf{1}$ を加えても VI の解は変わらない.
- 単体上の構造は射影した場 PF と接空間の要素に対する Jacobi 行列 $PJF(x)P$ で判定することができる（条件付き定値性）.
- 全空間での対称性・定値性を要求すると強すぎる場合がある.

低次元集合上の可積分性

$D \subset x^0 + L$ を相対的に開な凸集合とする．単体上の ポテンシャルϕ は

$$D\phi(x)[h] = \langle F(x), h \rangle \qquad (h \in L)$$

で定義する．可積分性の条件は

$$\langle h, JF(x)k \rangle = \langle k, JF(x)h \rangle \qquad \forall h, k \in L.$$

同値に，$PJF(x)P$ の L 上への制限が対称であること.

- 法線方向の成分は ポテンシャルの方向微分に影響しない.
- JF が全空間で非対称でも，接方向への制限が対称なら単体上では可積分.

線形3行動集団ゲーム

次のような利得関数を考える：

$$U(x) = b + (S + \omega A)x, \qquad F(x) = -U(x), \qquad x \in \Delta_3$$

を考える．ここで $S^\top = S$，$A^\top = -A$.

$$JF = -(S + \omega A), \qquad \mathrm{sym}(JF) = -S, \qquad \mathrm{skew}(JF) = -\omega A.$$

- payoff ポテンシャルの存在：A の接空間上の作用がゼロ.
- VI 場 $F = -U$ の単調性：$-S$ が L 上で半正定値.
- $-S$ が L 上で正定値なら，Nash 均衡は存在すれば一意.

✍ VIの理論とは符号が反対であることに注意！

負のフィードバック

$P = I - \frac{1}{3}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, $\mu > 0$ とし

$$U(x) = -\mu P x, \qquad F(x) = \mu P x.$$

- 利得ポテンシャル：$\Psi(x) = -\frac{\mu}{2}\|Px\|^2$.
- F は L 上で強単調かつ可積分.
- Ψ を最大化する一意な均衡は

$$x^* = \frac{1}{3}\mathbf{1}.$$

- 高い利用率が利得を下げる混雑効果（分散力）の最小モデル.

正のフィードバック

$\kappa > 0$ とし

$$U(x) = \kappa P x, \qquad F(x) = -\kappa P x.$$

- 利得ポテンシャル：$\Psi(x) = \frac{\kappa}{2}\|Px\|^2$.
- 可積分だが，F は単調でない.
- 純粋状態 e_1, e_2, e_3 は全て Nash 均衡．一様状態も一次条件を満たす.
- 同じ行動を選ぶほど利得が上がる coordination 的な集積力の最小モデル.

✍ ポテンシャルの存在は複数均衡を排除しない．ポテンシャルの曲率が構造を決める.

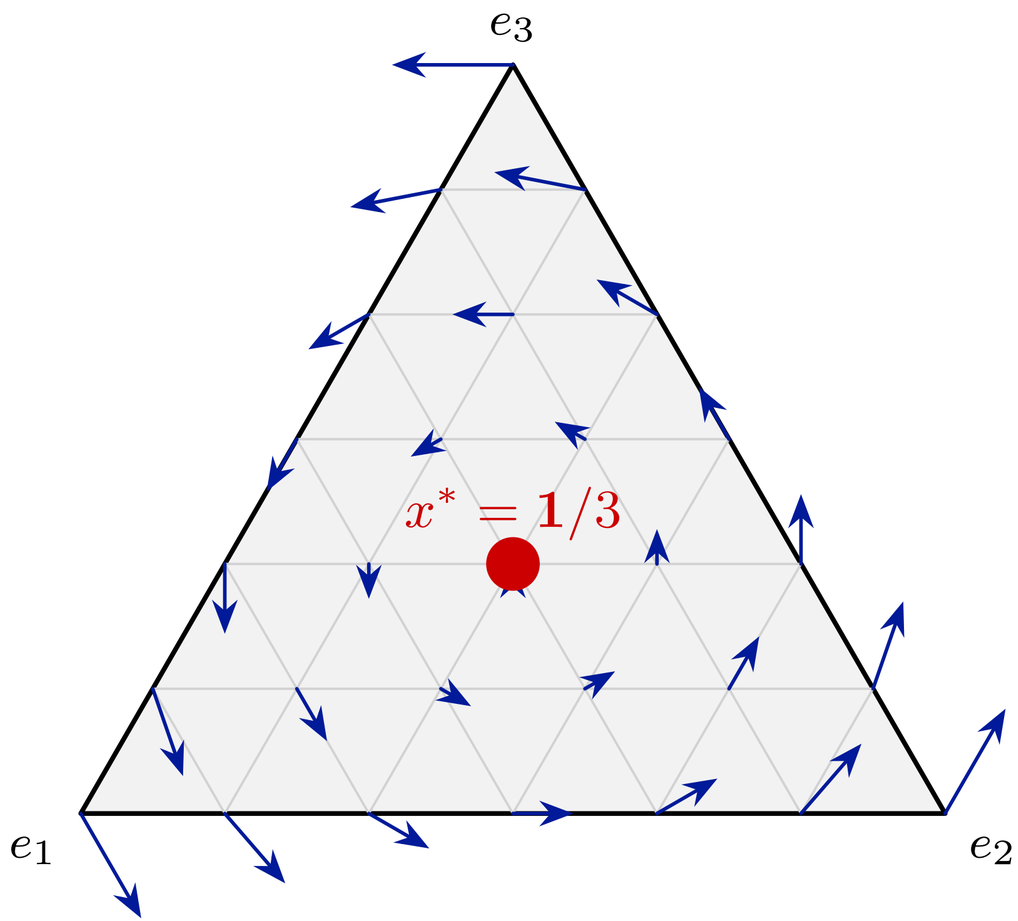
Rock–Paper–Scissors (RPS) 型：単調だが非可積分

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x) = \omega A x, \qquad \omega \neq 0.$$

- $F = -\omega A x$ の対称成分はゼロ：単調だが狭義単調ではない.
- 反対称成分は非ゼロ：ポテンシャルは存在しない.
- Nash 均衡は一意な $x^* = \mathbf{1}/3$.
- 一意性は狭義単調性からではなく，このゲーム固有の構造から従う.

Rock–Paper–Scissors (RPS) 型：単調だが非可積分

RPS型ゲームのベクトル場の様子.



$$U(x) = \omega A x \quad (\omega > 0)$$

中心の周りを回るかたち

散逸と回転の共存

$$U(x) = -\mu P x + \omega A x, \qquad F(x) = \mu P x - \omega A x, \qquad \mu > 0.$$

- F は L 上で強単調：均衡は一意.
- $\omega \neq 0$ なら非可積分：一つの目的関数には帰着しない.
- 一意な均衡は $x^* = \mathbf{1}/3$.
- μ が中心への散逸，ω が中心の周りの回転を表現.

✍ 一意な均衡に向かうか，巡回軌道に入るか，離散時間の計算手続が収束するかは，動学ごとに別途調べる必要がある.

3行動ゲームの分類

型	ポテンシャル	$F = -U$ の単調性	均衡の予測
$U = -\mu P x$	あり・凹	強単調	一意な内点
$U = \kappa P x$	あり・凸	非単調	複数均衡
$U = \omega A x$	なし	単調	回転・一意性は別判定
$U = -\mu P x + \omega A x$	なし	強単調	一意だが回転あり

- ポテンシャル：JF の反対称成分を見る.
- 単調性：JF の対称成分を接空間上で確認する.

🚲 発展：Helmholtz–Hodge 分解とゲーム

局所的な行列分解と大域的なベクトル場の分解

分解	対象	表現するもの
$JF(x) = S(x) + A(x)$	各点の Jacobian	局所的な伸縮と回転
$F = \nabla\phi + R$	領域全体のベクトル場	勾配成分と循環成分

- 第一の分解は各点での有限次元の行列分解.
- 第二の分解は関数空間における **大域的な射影**（Helmholtz–Hodge分解）.
- 同じ定理ではないが，共通する直観をもつので，せっかくなので言及しておく.

✍ $A(x)$ を点ごとに集めるだけでは，一般に大域的な循環成分 R は得られない.

L^2 Helmholtz 分解

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界凸領域，$F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ とする．適切な意味において

$$F = \nabla\phi + R, \qquad \operatorname{div} R = 0, \qquad R \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

と直交分解できる．ここで直交とは

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot R \, \mathrm{d}x = 0.$$

- $\phi \in H^1(\Omega)$ は定数を除いて一意であり，平均ゼロを課せば一意になる．
- R は一意で，勾配では説明できない（回転的な）成分を表す．
- F が勾配場であることと $R = 0$ は同値．

✍ $JF = S + A$ から Helmholtz 分解を直ちに構成することは一般にできないが，アナロジーに注目せよ．

有限ゲームのグラフ表現

有限戦略形ゲームでは，純粋戦略状態を頂点とし，一人だけが戦略を変える二頂点を辺で結ぶ．profile p から q への逸脱がプレイヤー i の変更なら，辺フローを

$$X(p,q) = u_i(q) - u_i(p)$$

と定める．すると

- exact potential game では $X(p,q) = \Phi(q) - \Phi(p)$，すなわちグラフ上の勾配流.
- 閉路に沿う利得差の和が非ゼロなら，純粋な ポテンシャルでは説明できない.
- unilateral deviation のインセンティブ構造が分解の対象.

✍ Candogan–Menache–Ozdaglar–Parrilo は，この graph flow に離散 Hodge 理論を適用した.

potential・harmonic・nonstrategic components

適切な内積の下で，有限ゲームは直交的に分解可能：

$$G = G_{\mathrm{P}} + G_{\mathrm{H}} + G_{\mathrm{N}}$$

成分	incentive の構造	主な含意
ポテンシャルG_{P}	graph 上の勾配	純粋 Nash が存在
harmonic G_{H}	循環・利害対立 (RPS)	generic には純粋 Nash なし
nonstrategic G_{N}	自己行動に依らない利得項	Nash 均衡集合を変えない

✍ nonstrategic 成分は逸脱利得差を変えないが，利得水準や厚生評価は変え得る．harmonic 成分であっても純粋 Nash 均衡がある場合もある．

本講の3行動ゲームとの接続

線形 population game

$$U(x) = b + (S + \omega A)x, \qquad x \in \Delta_3$$

では，接空間上で

- 対称部分 S が ポテンシャル的な成分，
- 反対称部分 ωA が RPS 型の循環成分．

従って coordination 型と RPS 型の比較は，ゲーム分解の低次元バージョンと捉えることもできる．

$$\text{ポテンシャル的な力} + \text{循環的な力} \quad \Longrightarrow \quad \text{均衡の位置と動学へ別々に影響}$$

✍ あくまでアナロジー（連続プレイヤー vs. 有限プレイヤー）

near-potential game：残差の大きさを測る

直交分解では

$$G_{\mathrm{P}} + G_{\mathrm{N}}$$

が potential game の空間への射影であり，G_{H} がそこからの残差になる.

- $\|G_{\mathrm{H}}\|$ が小さい：近い potential game を基準モデルとして使えるかもしれない.
- 逸脱利得差の距離が小さければ，近似均衡や応答動学の極限集合を評価できる場合.
- harmonic 成分が小さくとも収束性や純粋戦略 Nash 均衡の存在は結論できない.

✍ Ref: Candogan–Ozdaglar–Parrilo

まとめと次回予告

1. $JF = S + A$：A は可積分性，S は単調性を判断する基準になる.
2. ポテンシャルの存在と凸性，単調性と解の一意性との関係.
3. 回転成分は調整過程の収束性に弊教師うる.
4. 話題として，Helmholtz–Hodge 分解，有限ゲームにおける graph 上のゲーム分解.

次回：均衡と動学

様々な進化ゲーム動学を導入し，均衡の存在と動学的安定性について議論する.



参考文献

- 福島雅夫『非線形最適化の基礎』
- Facchinei, F. and Pang, J.-S. "**Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems**"
- Rockafellar, R. T. and Wets, R. J.-B. "**Variational Analysis**"
- Sandholm, W. H. "**Population Games and Evolutionary Dynamics**"
- Candogan, O., Menache, I., Ozdaglar, A. and Parrilo, P. A. "**Flows and decompositions of games: Harmonic and potential games**"：有限ゲームの graph Hodge 分解.
- Candogan, O., Ozdaglar, A. and Parrilo, P. A. "**Near-potential games: Geometry and dynamics**"：potential game への距離と動学.
- 土木学会『交通ネットワークの均衡分析』：Beckmann 変換と交通均衡 VI.