2026後期

均衡分析と数理最適化　第４講

均衡問題の様々な同値表現

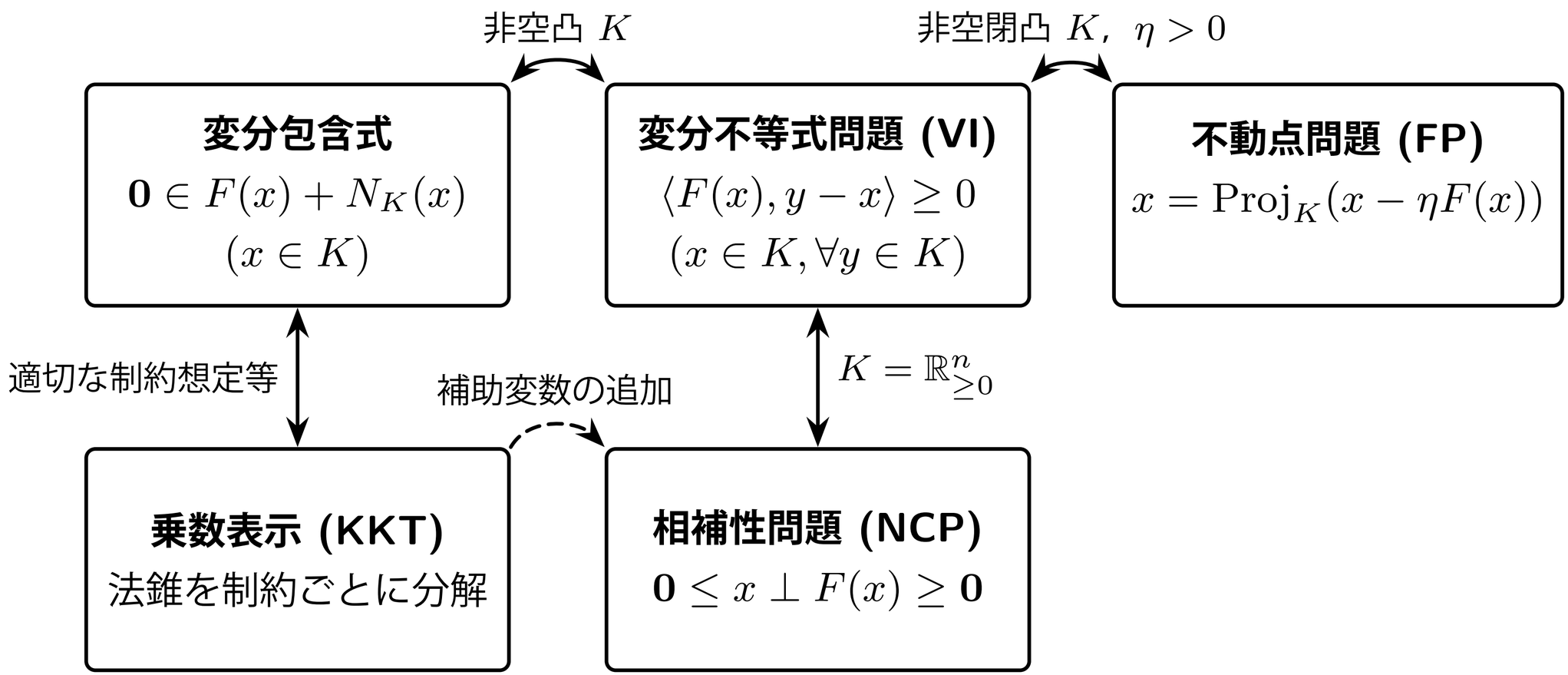
京都大学経済研究所　大澤 実

本講の目的

同じ均衡条件を，集合の幾何・成分ごとの相補性・不動点問題を通じて表現する.

1. 変分包含式と変分不等式 (VI) の同値性を確認する.
2. 非負象限上の VI を非線形相補性問題 (NCP) として解釈する.
3. 閉凸集合への射影による不動点問題 (FP) を導く.

本講で議論する問題クラスの対応関係



- 矢印は条件付の等価性であることに注意.
- $F = \nabla f$ なら最適化の一次条件と一致する．一般の F に共通目的関数はない.



変分包含式と変分不等式

復習 法錐と変分包含式

空でない凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ と $x \in K$ に対し法錐は

$$N_K(x) = \Big\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \Big\}.$$

均衡条件／一次条件の法錐による表示は

$$\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -F(x) \in N_K(x)$$

- 費用最小化型：$F = c$.
- 利得最大化型：$F = -U$.
- 最適化：$F = \nabla f$.　凸性がなければ一次の必要条件にとどまる.

変分不等式問題 (variational inequality problem)

定義 空でない凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ と写像 $F : K \to \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\text{Find } x \in K \text{ such that } \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in K$$

を **変分不等式問題** $\mathrm{VI}(K, F)$ と呼ぶ.

- $F(x)$ は候補 x で固定し，すべての比較点 $y \in K$ と比べる.
- K は変数が動ける方向を，F はその方向ごとの一次的な評価を表す.
- ここで K の閉性は要求していない.

変分包含式と VI の同値性

法錐の不等式表示に $z = -F(x)$ を代入するだけ：

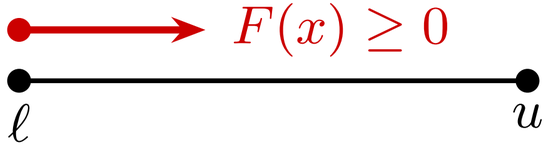
$$\begin{aligned} 0 \in F(x) + N_K(x) &\iff -F(x) \in N_K(x) \\ &\iff \langle -F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \\ &\iff \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \end{aligned}$$

- 一般のベクトル場 F で成立.
- K 凸性は，法錐が集合全体との不等式で表されることに使われている.

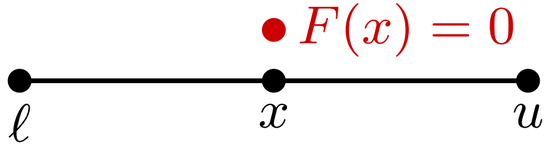
✍ K が非凸の時にはどのような問題が起こるか？

1次元閉区間の VI

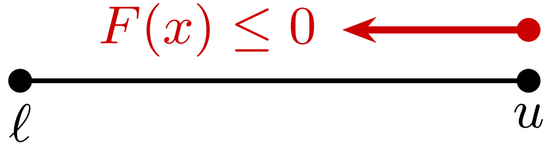
$K = [\ell, u] \subset \mathbb{R}$ とする．VI は $F(x)(y - x) \geq 0$ がすべての $y \in K$ で成立すること．



$x = \ell$



$F(x) = 0$



$x = u$

$$x = \ell \Rightarrow F(x) \geq 0, \qquad \ell < x < u \Rightarrow F(x) = 0, \qquad x = u \Rightarrow F(x) \leq 0.$$

- $F(x) = f'(x)$ のとき $\min_{x \in [\ell, u]} f(x)$ の最適性条件と一致．

直方体 (rectangle) 上の成分条件

許容領域が **直方体** $K = \prod_{i=1}^{n} [\ell_i, u_i]$ なら各成分を独立に動かせるので VI は次と等価：

$$
\begin{aligned}
x_i = \ell_i \quad &\Longrightarrow \quad F_i(x) \geq 0, \\
\ell_i < x_i < u_i \quad &\Longrightarrow \quad F_i(x) = 0, \\
x_i = u_i \quad &\Longrightarrow \quad F_i(x) \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

$F_i(x)$ は共通の状態 x での評価ゆえ方程式自体が成分ごとに分離するとは限らない.

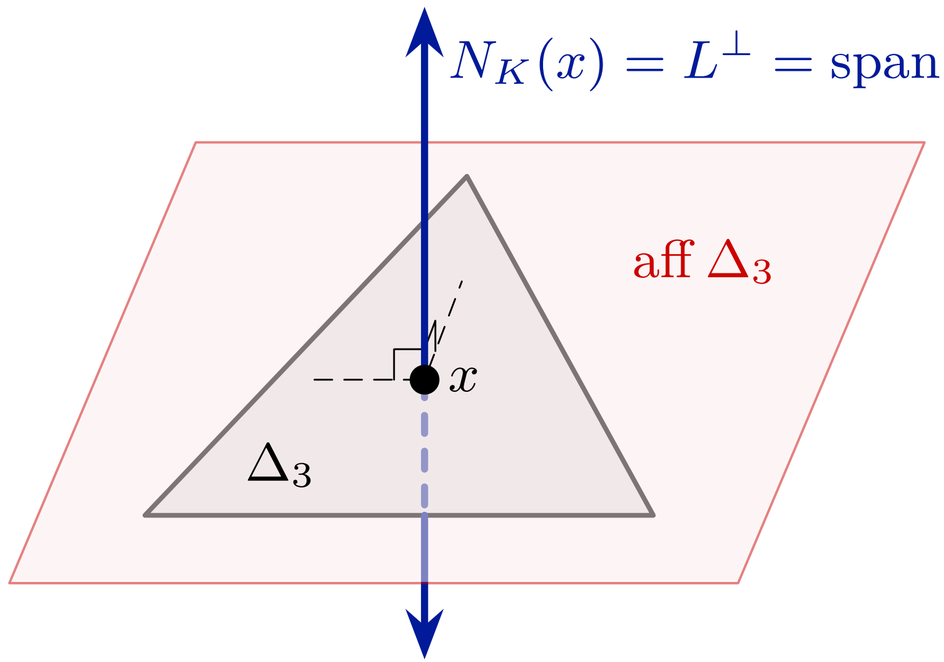
- $\ell_i = -\infty, u_i = +\infty$：$F_i(x) = 0$.
- $\ell_i = 0, u_i = +\infty$：非負制約と相補性.
- 有限の上下限：混合相補性 (mixed complementarity) の成分条件.

非線形方程式への帰着

許容領域が全空間 $K = \mathbb{R}^n$ であれば，$y - x$ として任意の方向 h と $-h$ を選べる：

$$\langle F(x), h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = \mathbf{0}.$$

- 境界のない集合では法錐は $\{\mathbf{0}\}$．単体の相対的内点では等式制約の法線が残る．



相補性条件・KKT条件 と VI

非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem; NCP)

定義 写像 $F : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ に対し

$$\text{Find } x \text{ such that} \qquad x \geq \mathbf{0}, \quad F(x) \geq \mathbf{0}, \quad x_i F_i(x) = 0 \quad \forall i$$

を **非線形相補性問題** NCP(F) と呼ぶ.

同じ条件を次のように略記する：

$$\mathbf{0} \leq x \ \perp \ F(x) \geq \mathbf{0}$$

あるいは，各 i に対して $\begin{cases} x_i > 0 \implies F_i(x) = 0, \\ F_i(x) > 0 \implies x_i = 0. \end{cases}$

非負象限上の VI と NCP

$K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ では必ず増加方向へ動ける．$x_i > 0$ なら減少方向へも動ける.

$$\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n_{\geq 0}, F) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{NCP}(F):\ x \geq \mathbf{0}, F(x) \geq \mathbf{0}, \langle x, F(x) \rangle = 0.$$

確認：条件 $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0$ について，y は任意ゆえ $y_j = x_j$ $(\forall j \neq i)$ とすると条件 $F_i(x)(y_i - x_i) \geq 0$ に帰着される.

- $x_i = 0$：$y_i > 0$ を選ぶと $F_i(x) \geq 0$.
- $x_i > 0$：$y_i = x_i \pm \varepsilon$ を選ぶと $F_i(x) = 0$.
- 非負項の和なので，$\langle x, F(x) \rangle = 0$ は $x_i F_i(x) = 0$ を成分ごとに含意する.

✍ R^2 上で図形的に確認してみよ.

線形相補性問題 (Linear Complementarity Problem; LCP)

定義 NCP で F が affine，すなわち $F(x) = Mx + q$ なら

$$\mathbf{0} \leq x \ \perp \ Mx + q \geq \mathbf{0}$$

を **線形相補性問題** LCP(M, q) と呼ぶ.

- 線形最適化問題・二次最適化問題の KKT 条件は，Lagrange 乗数も変数に含めれば LCP として記述できる.
- M の **対称成分・反対称成分** は，単調性・ポテンシャルの存在・回転を特徴づける.
  - $M^{\mathrm{sym}} \equiv \frac{1}{2}(M + M^\top)$，$M^{\mathrm{asym}} \equiv \frac{1}{2}(M - M^\top)$

✍ M が非対称なら，一般に $Mx + q$ は一つの目的関数の勾配ではない.

法錐の乗数表示と KKT 条件

許容集合を $K = \{x : g_i(x) \leq 0\ (i = 1, \ldots, m),\ h_j(x) = 0\ (j = 1, \ldots, \ell)\}$ とする.

g, h の凸性・微分可能性と適切な制約想定のもとで

$$N_K(x) = \left\{ \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_j \mu_j \nabla h_j(x) : \lambda_i \geq 0, \lambda_i g_i(x) = 0 \right\}.$$

従って 変分不等式に対する KKT 条件は

$$\begin{cases} F(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_j \mu_j \nabla h_j(x) = \mathbf{0}, \\ g(x) \leq \mathbf{0}, \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_i g_i(x) = 0, \\ h(x) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

まとめ：VI・NCP・KKT条件の関係

特殊化

- $K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ の VI は NCP．更に $F(x) = Mx + q$ なら LCP.
- $K = \mathbb{R}^n$ なら非線形方程式 $F(x) = \mathbf{0}$.

成分表示

- KKT 条件：具体的な制約関数 g, h で書かれた K の法錐を Lagrange 乗数で表した場合．等価性の保証には制約想定が必要.

最適化問題との関係

- $F = \nabla f$ なら最適化の一次条件．f が凸なら大域最適性と同値.
- 一般の均衡問題では F が勾配でなくても VI・NCP・FP は定義可能.



閉凸集合への射影と不動点

Euclid 射影

空でない閉凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$\mathrm{Proj}_K(z) = \operatorname*{arg\,min}_{y \in K} \frac{1}{2}\|y - z\|^2$$

はすべての $z \in \mathbb{R}^n$ について一意に存在する.

- **閉性**：最短点が集合内に存在するために必要.
- **凸性**：最短点の一意性と一次条件の十分性を与える.

事実 射影は非拡大的：$\|\mathrm{Proj}_K(z) - \mathrm{Proj}_K(w)\| \leq \|z - w\|$.

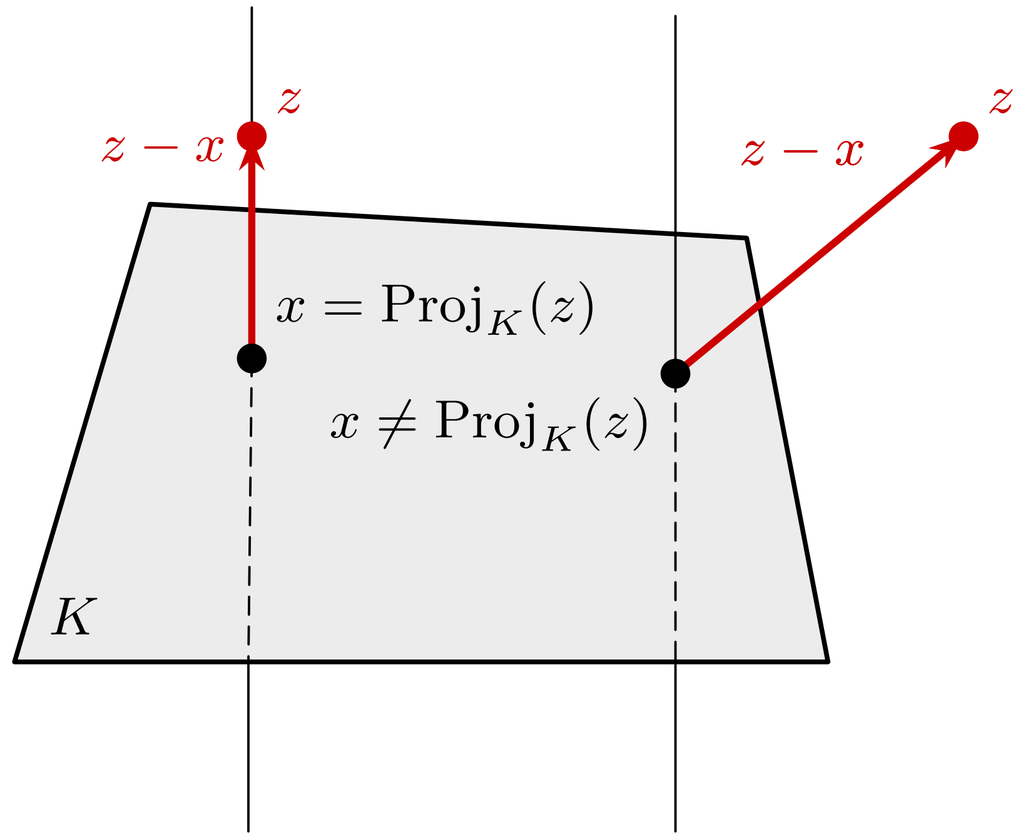
射影の法錐による特徴づけ

射影点から外の点へ向かうベクトルは
K の外向き法線：

$$x = \mathrm{Proj}_K(z) \iff z - x \in N_K(x).$$

あるいは

$$\langle z - x, y - x \rangle \leq 0 \qquad \forall y \in K.$$



VI と不動点問題 (Fixed Point Problem; FP) の同値性

定理 K を空でない閉凸集合，$\eta > 0$ とする．次は同値：

1. $\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x)$
2. $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$
3. $x = \mathrm{Proj}_K(x - \eta F(x))$

従って VI は写像

$$T_\eta(x) = \mathrm{Proj}_K\Big(x - \eta F(x)\Big)$$

の **不動点問題** $x = T_\eta(x)$ として表せる.

不動点問題への変形

射影の特徴づけに $z = x - \eta F(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Proj}_K(x - \eta F(x)) &\iff -\eta F(x) \in N_K(x) \\ &\iff -F(x) \in N_K(x) \\ &\iff \mathbf{0} \in F(x) + N_K(x). \end{aligned}$$

第2行では $N_K(x)$ が錐であることと $\eta > 0$ を使った.

- 解集合は $\eta > 0$ の選び方に依存しない.
- 反復 $x^{k+1} = T_\eta(x^k)$ の収束性は η と F の性質に依存する.

射影残差 (projection residual)

定義 $\eta > 0$ に対して

$$R_\eta(x) = x - \mathrm{Proj}_K(x - \eta F(x)), \qquad r_\eta(x) = \frac{\|R_\eta(x)\|}{\eta}$$

を **射影残差** と呼ぶ.

明らかに以下が成立：

$$r_\eta(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } \mathsf{VI}(K, F) \text{ の解.}$$

- 制約付き問題では $\|F(x)\|$ が小さい必要はない.
- 数値計算では，実行可能性と r_η をソルバの停止表示とは独立に再計算するとよい.

不動点表現と存在定理

K を空でない**コンパクト凸集合**，$F : K \to \mathbb{R}^n$ を連続とする.

- $T_\eta(x) = \mathrm{Proj}_K(x - \eta F(x))$ は K から K への連続写像.
- **Brouwer の不動点定理** より，$x = T_\eta(x)$ を満たす $x \in K$ が存在.
- よって $\mathrm{VI}(K, F)$ は少なくとも一つ解を持つ.

K のコンパクト性 $+$ F の連続性 $\Longrightarrow$ 解の存在性

- 非有界集合では存在を Brouwer だけから結論できない.
- 開集合・非凸集合・離散集合では射影が存在しないか一意でないことがある.

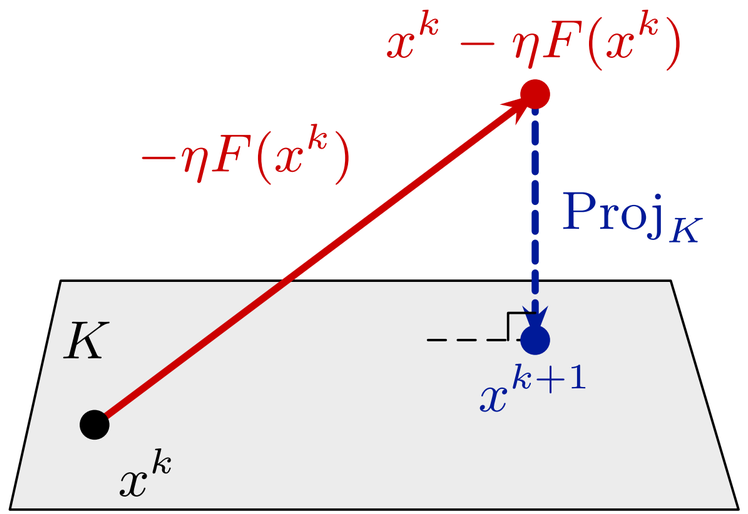
✍ 一意性・動学的安定性・反復法の収束性は別の問題.

同値な不動点問題と反復法の収束性

不動点表示が存在しても，単純な反復法

$$x^{k+1} = \mathrm{Proj}_K\Big(x^k - \eta F(x^k)\Big)$$

が必ず収束するわけではない.



- **解の特徴づけ**：$x = T_\eta(x)$ は $\eta > 0$ なら VI と同値 $=$ 静学的な主張.
- **数値解法の収束性**：単調性・Lipschitz 性・刻み幅など追加条件が必要.
  例えば，回転成分が強いと単純反復は循環・発散しうる.

✍ 第5講でベクトル場の構造，第7・8講で射影法の収束条件を議論する.



3行動集団ゲーム

集団ゲームの Nash 均衡の VI 表現

単一集団，$K = \Delta_n = \{x \geq \mathbf{0} : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\}$，利得 $U(x)$ を考える．第1講より

$$x^* \in \mathrm{NE}(U) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle -U(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Delta_n.$$

従って

$$F(x) = -U(x), \qquad 0 \in -U(x) + N_{\Delta_n}(x).$$

- 利得は候補状態 x^* に固定して比較する．
- VI は現在の分布より高い平均利得を与える別分布がないことの表現．

集団ゲームの Nash 均衡の相補性条件表現

共通の最大利得を $V = \max_i U_i(x)$ とおくと Nash 均衡条件は

$$\mathbf{0} \le x \ \perp \ V\mathbf{1} - U(x) \ge \mathbf{0}, \qquad \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1, \qquad V \in \mathbb{R}.$$

すなわち

$$\begin{cases} x_i > 0 & \Longrightarrow \quad U_i(x) = V, \\ x_i = 0 & \Longrightarrow \quad U_i(x) \le V. \end{cases}$$

- 等式制約の Lagrange 乗数 V は均衡利得として解釈できる.
- （V は自由変数なので，正確な問題クラスは NCP ではなく MiCP）

集団ゲームの Nash 均衡の射影 FP 表現

$F = -U$ を射影 FP に代入すると

$$x = \mathrm{Proj}_{\Delta_n}\Big(x + \eta U(x)\Big), \qquad \eta > 0.$$

- $x + \eta U(x)$ は高利得行動の利用率を増やす.
- 単体への射影が非負性と総量 1 を保証する.
- 固定点であることは Nash 均衡と同値
- この更新の収束性は別途検討する.

✍ η は同値な表現のための任意の正数．行動調整の速度や算法の刻み幅と解釈する場合は追加の分析が必要.

例 3行動ゲーム

$K = \Delta_3$ とし，次の利得関数を仮定する：

$$U(x) = \begin{pmatrix} 3 - 2x_1 \\ 2 - x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問 $F = -U$ として次を求めよ.

1. Nash 均衡 x^* と均衡利得 V^*.
2. VI 不等式の確認方法.
3. $\eta = 1$ の射影 FP による確認方法.

例の解答：MiCP

もし $x_3 > 0$ なら $V = 1$．Nash 条件 $U_1 \le 1$ は $x_1 = 1$ を要求し，$x_3 > 0$ と矛盾する．従って $x_3 = 0$．また両端点は均衡でないので $x_1, x_2 > 0$．このとき

$$3 - 2x_1 = 2 - x_2 = V, \qquad x_1 + x_2 = 1.$$

従って

$$x^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x^*) = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V^* = 5/3.$$

$U_3(x^*) = 1 < V^*$ から，未利用行動の条件も確認できる．

例の解答：VI 表現

任意の $y \in \Delta_3$ に対して

$$\langle U(x^*), y \rangle = \frac{5}{3}(y_1 + y_2) + y_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y_3 \leq \frac{5}{3}.$$

一方

$$\langle U(x^*), x^* \rangle = \frac{5}{3}.$$

従って

$$\langle -U(x^*), y - x^* \rangle = \langle U(x^*), x^* - y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Delta_3.$$

✍ 一つの候補 x^* で利得を固定した上で，任意の比較分布 y に対する不等式を確認している.

例の解答：射影 FP 表現

$\eta = 1$ とすると

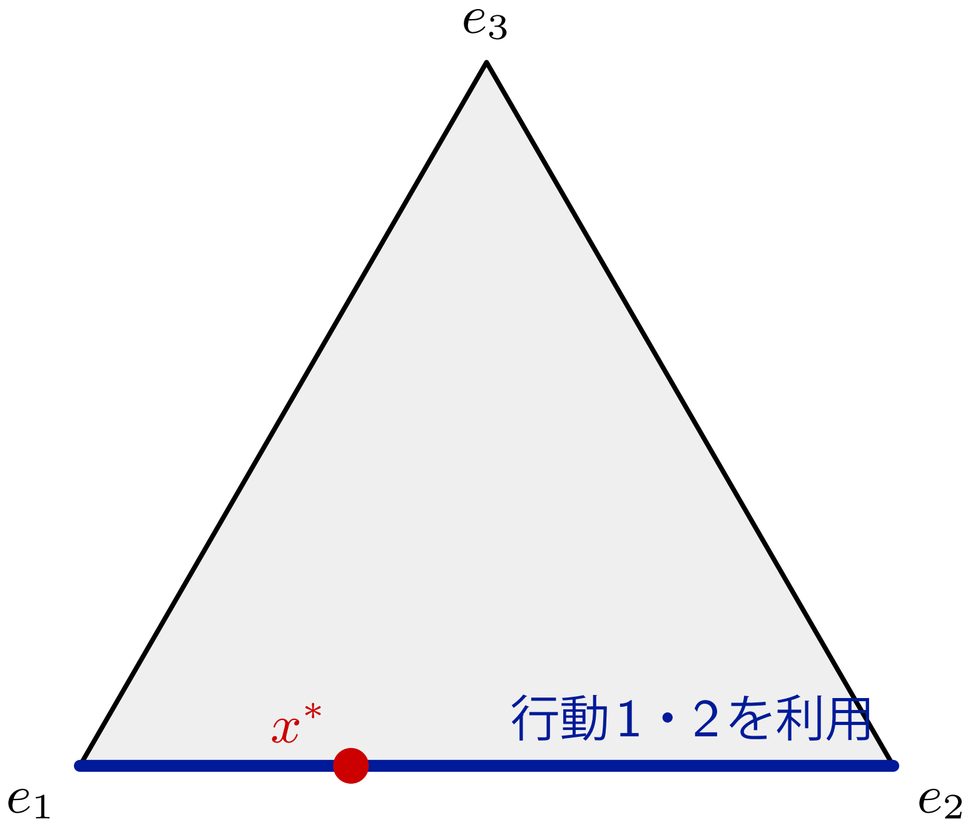
$$z = x^* + U(x^*) = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

単体への射影は，ある τ によって

$$\mathrm{Proj}_{\Delta_3}(z) = (z - \tau \mathbf{1})_+, \qquad \langle \mathbf{1}, (z - \tau \mathbf{1})_+ \rangle = 1$$

と書ける．$\tau = 5/3$ を代入すると確かに $\boxed{\mathrm{Proj}_{\Delta_3}(z) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = x^*}$.

例の幾何



✍ 各頂点および x^* で $F = -U$ の向きを描いてみよ.



Wardrop 均衡

Wardrop 均衡の VI 表現

単一 OD，固定需要 Q，経路集合 $\mathcal{R}$ を考える．**経路フロー** h と経路費用 $C(h)$ に対し

$$K = \{h \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|\mathcal{R}|} : \langle \mathbf{1}, h \rangle = Q\}.$$

Wardrop 均衡は「利用経路は最小費用」だから VI(K, C)：

$$\langle C(h^*), y - h^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

集団ゲームの $F = -U$ を，費用 $F = C$ に置き換えただけ．

✍ リンクフロー表示では，経路選択との対応や実行可能集合の像を確認する必要がある（第10講）．

Wardrop 均衡の MiCP・FP 表現

MiCP：最小経路費用を λ とすると利用経路は費用 λ，未利用経路はそれ以上.

$$\mathbf{0} \leq h \ \perp \ C(h) - \lambda \mathbf{1} \geq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{1}, h \rangle = Q.$$

- 最小費用流問題との違いは何か？

射影 FP：等価な FP は

$$h = \mathrm{Proj}_K(h - \eta C(h)), \qquad \eta > 0.$$



Armington 型の市場均衡

Armington 型市場清算の復習

固定供給 $q_i > 0$，**氷解型の (iceberg)** 貿易費用 $\tau_{ij} \geq 1$，$\sigma > 1$ とする.

$$\pi_{ij}(p) = \frac{(p_i \tau_{ij})^{1-\sigma}}{\sum_k (p_k \tau_{kj})^{1-\sigma}}, \qquad F_i(p) = p_i q_i - \sum_j \pi_{ij}(p) p_j q_j.$$

- π_{ij}：仕向地 j の産地 i への支出シェア.
- F_i：産地 i の金額ベースの超過供給.
- 市場清算：$F_i(p) = 0$.

価格尺度と Walras の恒等式

価格を $a > 0$ 倍しても支出シェアは変わらず

$$\pi_{ij}(ap) = \pi_{ij}(p), \qquad F(ap) = aF(p).$$

よって清算価格には尺度不定性がある．また

$$\sum_i F_i(p) = \sum_i p_i q_i - \sum_j p_j q_j \sum_i \pi_{ij}(p) = 0.$$

価格基準を $p_1 = 1$ と固定すれば

$$F_i(p) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

を解けばよく，Walras 恒等式から第1市場も清算する.

正価格断面と射影 FP の前提

第1講で定義した価格集合

$$K_{>0} = \{p \in \mathbb{R}^n_{>0} : p_1 = 1\}$$

は凸だが，**開集合**である.

- $K_{>0}$ への射影は，境界上に最短点が来ると達成されない.
- 従って「閉凸集合への射影 FP」の定理をそのまま適用できない.
- 本来の均衡条件は，正価格と正規化のもとでの非線形方程式 $F_{2:n}(p) = \mathbf{0}$.

計算用の閉凸集合を導入する場合

$0 < \varepsilon < 1 < M$ を選び

$$K_{\varepsilon,M} = \{p : p_1 = 1,\ \varepsilon \le p_i \le M\ (i = 2, \dots, n)\}$$

とすれば，これはコンパクト凸集合.

$$p = \mathrm{Proj}_{K_{\varepsilon,M}}\Big(p - \eta F(p)\Big)$$

は $\mathsf{VI}(K_{\varepsilon,M}, F)$ と同値.

- 解がすべての人工的上下限の内側なら，接方向 $2{:}n$ で $F_i(p) = 0$.
- 解が上下限に当たれば本来の市場清算解とは限らない.
- ε, M に対する感度と市場清算残差を確認する.



まとめ

例 交通モード選択

$K = \Delta_2$，道路費用 $C_1(x) = 20 + 40x_1$，電車費用 $C_2(x) = 40$ とする.

問 次を一つの整合的な符号規約で書け.

1. VI(K, C).
2. 共通の均衡費用 λ を用いた MiCP.
3. $\eta > 0$ を用いた射影 FP.
4. 均衡 x^* および均衡条件の確認.

例の解答

次の通り：

$$\begin{aligned}
&\langle C(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 && \forall y \in \Delta_2, \\
&\mathbf{0} \leq x^* \ \perp \ C(x^*) - \lambda \mathbf{1} \geq \mathbf{0}, && \langle \mathbf{1}, x^* \rangle = 1, \\
&x^* = \mathrm{Proj}_{\Delta_2}\Big(x^* - \eta C(x^*)\Big), && \eta > 0.
\end{aligned}$$

境界では費用の低い側へ移る誘因があるため両行動を利用し，

$$20 + 40x_1 = 40 \quad \Longrightarrow \quad x^* = (1/2, 1/2), \qquad \lambda = 40.$$

MiCP の相補性，VI，射影残差のいずれでも確認できる．

まとめと次回予告

1. 変分包含式と VI は 凸集合の法錐の定義から同値.
2. $K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ なら NCP．等式制約を伴う単体では MiCP が自然.
3. K が空でない閉凸集合なら，任意の $\eta > 0$ で射影 FP と同値.
4. 同値な不動点表示とその単純反復の収束性は異なる.

次回：ベクトル場の構造

Jacobian の対称成分と回転成分，potential，単調性を議論し，問題を解く前に一意性・循環・複数均衡の可能性を予測する.





付録

射影の特徴づけの証明

$\phi(y) = \frac{1}{2}\|y - z\|^2$ は強凸で $\nabla\phi(y) = y - z$. 閉凸集合 K 上の最小点 x の一次条件は

$$\langle x - z, y - x\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in K.$$

これは

$$\langle z - x, y - x\rangle \leq 0 \qquad \forall y \in K$$

すなわち $z - x \in N_K(x)$ と同値.

強凸性よりこの一次条件は必要十分で，最小点も一意.

単体への射影

$z \in \mathbb{R}^n$ に対する Δ_n への射影問題は

$$\min_x \ \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \quad \text{s.t.} \quad x \geq \mathbf{0}, \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1.$$

KKT 条件から，ある $\tau \in \mathbb{R}$ が存在して

$$x_i = \max\{z_i - \tau, 0\}, \qquad \sum_i \max\{z_i - \tau, 0\} = 1.$$

τ は左辺が 1 となるように一意に決まる．例では $z = (7/3, 2, 1)$，$\tau = 5/3$.

単体の法錐から従う MiCP

$\Delta_n = \{x \geq \mathbf{0} : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\}$ の法錐は

$$N_{\Delta_n}(x) = \{\nu \mathbf{1} - s : \nu \in \mathbb{R},\ s \geq \mathbf{0},\ s_i x_i = 0\}.$$

$F = -U$ を $0 \in F + N_{\Delta_n}$ に代入すると

$$-U(x) + \nu \mathbf{1} - s = \mathbf{0}, \qquad s \geq \mathbf{0}, \quad s_i x_i = 0.$$

$V = \nu$ とおけば $s = V\mathbf{1} - U(x)$ なので

$$\mathbf{0} \leq x \ \perp \ V\mathbf{1} - U(x) \geq \mathbf{0}, \qquad \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1.$$

価格を NCP で表す際の注意

形式的には，非負価格と超過供給について

$$\mathbf{0} \leq p \ \perp \ F(p) \geq \mathbf{0}$$

と書く市場モデルもある．しかし本講の固定供給 Armington 例では

- $\pi_{ij}(p)$ が $p_i^{1-\sigma}$ を含み，ゼロ価格での定義を追加する必要がある．
- 正価格均衡では $p_i > 0$ なので相補性は $F_i(p) = 0$ に退化する．
- 尺度不定性を除く価格正規化が別途必要．

ゼロ価格を含むモデルの定義のもとではNCPとして記述できる．

参考文献

- 福島雅夫『非線形最適化の基礎』：変分不等式，射影，最適性条件.
- Facchinei, F. and Pang, J.-S. “**Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems**”：VI・NCP の標準的専門書.
- Cottle, R. W., Pang, J.-S. and Stone, R. E. “**The Linear Complementarity Problem**”：LCP.
- Sandholm, W. H. “**Population Games and Evolutionary Dynamics**”：population game と Nash VI.
- 土木学会『交通ネットワークの均衡分析』：Wardrop 均衡と VI.