2026後期

## 均衡分析と数理最適化　第３講

# 最適化問題と均衡問題

京都大学経済研究所　大澤 実

# 本講の目的

第1講で触れた最適性条件を第2講で学んだ許容集合の幾何から詳しく理解する.

1. $F = \nabla f$ の場合として最適化を捉え，凸性による十分性を理解する.
2. 法錐の成分表示から KKT 条件・相補性を導く.
3. 最小費用流問題の双対価格と双対性ギャップについて議論する.

## 復習

凸集合 $K$ の法錐は $N_K(x) = \{z : \langle z, y - x\rangle \le 0 \quad \forall y \in K\}$.

よって凸集合における直交条件は

$$\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x) \iff \langle F(x), y - x\rangle \ge 0 \quad \forall y \in K.$$

- 最適化：$F = \nabla f$．実行可能な方向へ目的値が一次で減少しない．
- 費用最小化の均衡：$F =$ コスト．利得最大化の均衡：$F = -$利得．
- 単体・フロー多面体では，等式制約の法線方向も $N_K(x)$ に含まれる．

✍ 本講は $F = \nabla f$ の構造を使う．一般の $F$ に対するVI・NCP・FPの等価変形は第4講で整理する．

## 問 2×2輸送問題

第2講の単位供給・単位需要の輸送多面体を再び考える.

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

目的を総費用 $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ の最小化とする.

1. どちらの端点の費用が安いか．相対的内点でさらに安くなる可能性はあるか.
2. 費用行列が $\widetilde{C} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ならどうか.
3. 解候補に対して，他の輸送パターンがより安価でないことをどう示すか.



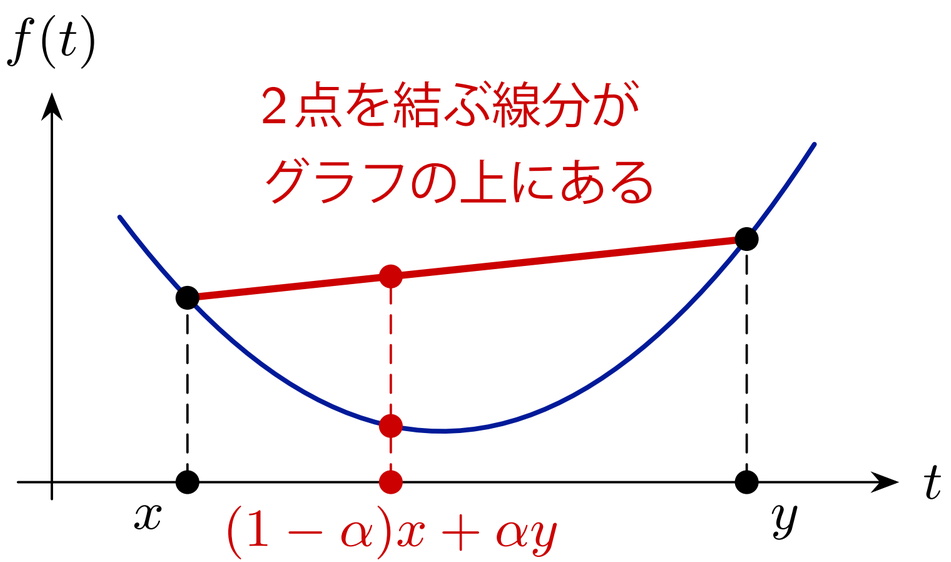
# 凸性と最適性条件

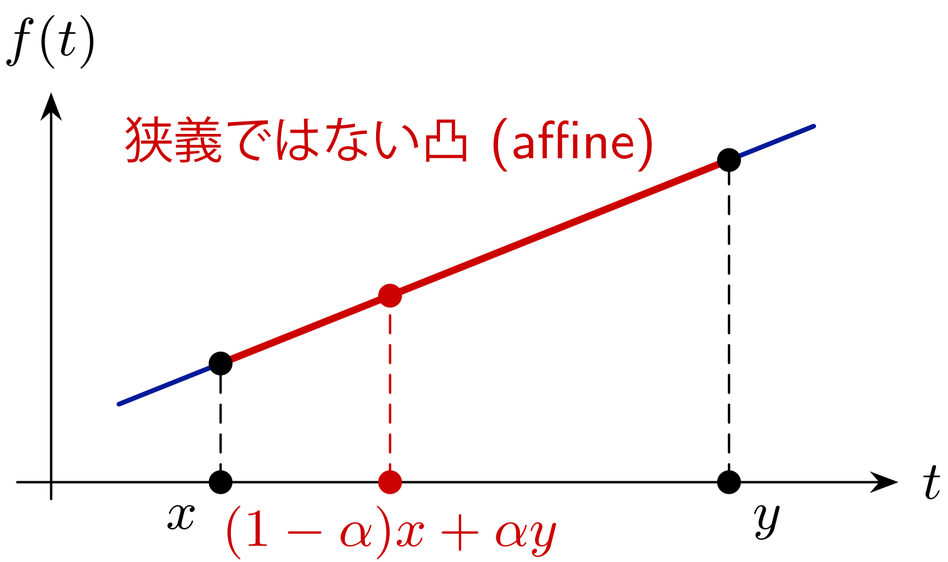
# 凸関数 (convex function)

**定義** 凸集合 $K$ 上の関数 $f$ が **凸関数** であるとは

$$f((1-\alpha)x+\alpha y) \le (1-\alpha)f(x)+\alpha f(y) \quad (x,y \in K,\ 0 \le \alpha \le 1)$$

が成立すること．$x \neq y,\ 0 < \alpha < 1$ で常に狭義不等号なら **狭義凸**.



# 微分可能な凸関数の特徴づけ

$K$ を含む開集合上で $f$ が微分可能とする．$f$ が $K$ 上で凸であることは次と同値：

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \qquad \forall x, y \in K$$

接平面による一次近似が，**全ての $K$ 上の 点** で **目的値の下界** を与える．

- 線形目的関数 $f(x) = \langle c, x \rangle$ では上式は等号．
- 凸二次関数 $f(x) = \frac{1}{2} x^\top H x + \langle a, x \rangle$：$H = H^\top \succeq 0$ なら凸．
- 低次元の $K$ では，$K$ 上の凸性で確認する方向は $K$ の方向空間に限る．

✍ Hesse行列の正定値性は狭義凸性を保証する **十分条件**．狭義凸でも一点で曲率がゼロになり得る（$t^4$）．

# 局所最適解の一次の必要条件

$K$ を非空凸集合，$f$ を $K$ の近傍で微分可能とする．$x^* \in K$ が **局所最適解** なら

$$\langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K \quad \Longleftrightarrow \quad -\nabla f(x^*) \in N_K(x^*).$$

**理由**：任意の $y \in K$ に向かう線分 $x^* + t(y - x^*)$ は実行可能．方向微分について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x^* + t(y - x^*))\Big|_{t=0+} = \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$$

が任意の $y \in K$ で成立すれば確かに局所的に最小．

✍ 接錐で書けば $\langle \nabla f(x^*), h \rangle \geq 0 \ \forall h \in T_K(x^*)$．制約の境界では $\nabla f = \mathbf{0}$ を要求しない．

# 凸性のもとでの十分性

さらに $f$ が $K$ 上で凸なら，一次条件を満たす $x^*$ に対して

$$f(y) \geq f(x^*) + \underbrace{\langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle}_{\geq 0} \geq f(x^*) \qquad \forall y \in K.$$

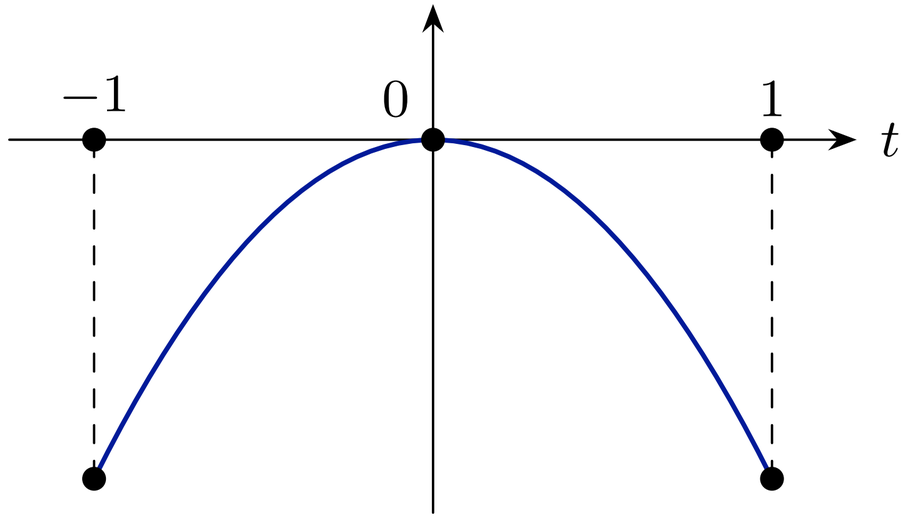
従って $x^*$ は **大域的最適解**．すなわち，$K$ が有界閉凸で $f$ が凸ならば

$$x^* \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in K} f(x) \iff \mathbf{0} \in \nabla f(x^*) + N_K(x^*)$$

- 凸集合上の凸関数の最適化（**凸最適化問題**）では，局所最適解は全て大域最適解.
- 許容集合の幾何から従う必要性 + 目的関数の凸性から従う十分性

# 例 非凸な目的関数に対する一次の条件

$$\min_{-1\le t\le 1} f(t) = -t^2.$$




- $t = 0$：$f'(0) = 0$，法錐は $\{\mathbf{0}\}$.
  一次条件を満たすが最大点.
- 最小点は $t = \pm 1$.
  境界では勾配はゼロでなくてよい.
- $K$ は凸でも，$f$ の凸性がなければ
  一次条件だけでは最適性を保証しない.

# 解の存在・凸性・一意性についての標準的事実

- **解の存在**：非空コンパクトな $K$ 上で連続な $f$ は最小値を達成する.
  - 単体・輸送多面体・有界なフロー多面体に適用できる.
  - $K, f$ の凸性は要求されないことに注意.
- **解集合の凸性**：$K, f$ が凸なら，最適解同士の凸結合も最適解.
  - 線形最適化（LP）では最適解が端点にある場合も，面全体になる場合もある.
- **解の一意性**：$f$ が非空で凸な $K$ 上で狭義凸なら，最適解は 存在すれば 一意.
- **解の存在・一意性**：$f$ が非空で閉凸な $K$ 上で **強凸** (strongly convex) なら，最適解は存在して一意.（$K$ は有界でなくてよい.）

✍ 第2講の循環流を許す集合は一般には非有界．ただし全リンク費用が厳密に正なら，費用の下位集合 (sublevel set) は有界となり，最小費用解は存在する.



# 法錐の成分表示とKKT条件

# 多面体の法錐と有効制約 (active/binding constraint)

$K = \{x : Ax = b,\ Cx \le d\}$ とし，**有効制約集合** を $I(x) = \{i : C_i x = d_i\}$ とすると

$$N_K(x) = \left\{ A^\top \nu + \sum_{i \in I(x)} \lambda_i C_i^\top : \nu \text{ 自由},\ \lambda_i \ge 0 \right\}.$$

非有効制約の乗数をゼロとおくと，相補性 $\lambda_i(C_i x - d_i) = 0$ が成立する.

$$-\nabla f(x) \in N_K(x) \iff \nabla f(x) + A^\top \nu + C^\top \lambda = \mathbf{0}$$

$$\left(\text{s.t. } Ax = b,\ Cx \le d,\ \lambda \ge \mathbf{0},\ \lambda_i(C_i x - d_i) = 0\right)$$

✍ 等式の法線は正負どちらも使える．不等式は外向き法線の非負結合．多面体では冗長な制約があっても法錐のこの表示は成立する.

# $K$ の具体的表示のもとでのLagrange関数とKKT条件

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t. } g_i(x) \le 0\ (i=1,\dots,m), \quad h_j(x) = 0\ (j=1,\dots,\ell).$$

**定義** **Lagrange関数**：$L(x,\lambda,\nu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_j \nu_j h_j(x)$.

**停留性：** $\nabla_x L(x,\lambda,\nu) = \mathbf{0}$

**主実行可能性：** $g_i(x) \le 0, \quad h_j(x) = 0$

**乗数の符号：** $\lambda_i \ge 0, \quad \nu_j$ は自由

**相補性：** $\lambda_i g_i(x) = 0 \quad \forall i$

これらを **Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件** と呼ぶ.

# 制約想定 (constraint qualification)

各関数 $f, g, h$ は近傍で連続微分可能とする．非線形制約では，許容集合の境界の幾何を制約の勾配で捉えられるための十分条件が必要.

- **LICQ（一次独立制約想定）**：候補点の全ての等式制約の勾配と，有効な不等式制約の勾配が一次独立．局所最適解で成立すればKKT条件を満たす乗数が存在する.
- **Slater条件**：$f, g_i$ が凸，等式が affine のとき，等式を満たし，全ての不等式を厳密に満たす点 $x^0$ が存在する．$(g_i(x^0) < 0 \ \forall i,\ h_j(x^0) = 0 \quad \forall j.)$

Slater条件の下で，最適解があればKKT条件は **必要十分**.

凸問題 のKKT条件の十分性には制約想定は不要.

✍ フローの冗長な保存則はLICQを壊すが，多面体の法錐表示やLP双対性が破綻するわけではない.

## 例 KKT条件の制約の表現への依存性

$$\min_{t} \ t \quad \text{s.t. } g(t) = t^2 \leq 0.$$

- 許容集合は $K = \{0\}$. $t^* = 0$ は唯一の実行可能点であり，最適解.
- $N_K(0) = \mathbb{R}$ なので $-f'(0) = -1 \in N_K(0)$.
- しかし $g'(0) = 0$ なので，どの $\lambda \geq 0$ でも

$$f'(0) + \lambda g'(0) = 1 + \lambda \cdot 0 \neq 0.$$

KKT乗数は存在しない．実際，LICQもSlater条件も成立しない.

✍ 同じ許容集合を等式制約 $h(t) = t = 0$ で表せば，LICQ が成立し，KKT乗数 $\lambda = -1$ が存在．法錐は許容集合そのものにより定まるが，それを制約関数の勾配によって表現できるかは制約の具体的表示に依存.

# Lagrange双対問題：目的値の下界

**双対目的関数** (dual objective function) を

$$q(\lambda, \nu) = \inf_{x \in K} L(x, \lambda, \nu), \qquad \lambda \geq 0$$

と定義する．実行可能な任意の $x$ に対して

$$\underbrace{q(\lambda, \nu)}_{\text{下界}} \;\leq\; L(x, \lambda, \nu) \;\leq\; \underbrace{f(x)}_{\text{実行可能解の目的値}}.$$

この下界を最大化する問題が **Lagrange双対問題**：

$$\max_{\lambda \geq \mathbf{0},\ \nu \text{ 自由}} \quad q(\lambda, \nu).$$

✍ 最大化問題では上界を最小にする．主・双対の実行可能な候補は，最適値を両側から挟む上下界を与える．

# 弱双対性・強双対性とKKT

主問題の最適値を $v_{\mathrm{P}} = \min_x f(x)$，双対問題の最適値を $v_{\mathrm{D}} = \max_{\lambda,\nu} q(\lambda, \nu)$ とする.

- **弱双対性**：$v_{\mathrm{D}} \leq v_{\mathrm{P}}$．任意の主・双対実行可能候補で下界 $\leq$ 上界.
- **強双対性**：$v_{\mathrm{D}} = v_{\mathrm{P}}$．凸最適化問題で最適値が有限でSlater条件が成立すれば強双対性が成立し，双対最適値も達成される.

凸最適化問題でKKT条件を満たす組 $(x^*, \lambda^*, \nu^*)$ では，停留性が $x$ の $L$ の大域最小化を，相補性が $L(x, \lambda, \nu) = f(x)$ を保証する.

$$q(\lambda^*, \nu^*) = L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f(x^*).$$

✍ 強双対性は最適値の一致．主問題の最適解の存在・一意性・Lagrange 乗数の一意性とは異なる.



# 最小費用流と双対価格

# 最小費用流 (minimum cost flow)

第2講と同じ接続行列 $B$（始点 $+1$，終点 $-1$），外生供給 $d$ を用いる.

以下の問題の解を **最小費用流** と呼ぶ.

$$\text{(P)} \qquad \min_{f} \langle c, f \rangle \qquad \text{s.t. } Bf = d, \quad f \geq \mathbf{0}.$$

- $f$ はリンク・フロー，$c_e$ は **一定の** 単位費用. $\sum_i d_i = 0$.
- 目的関数・制約が線形 (affine) の **線形最適化問題** (LP).
- 許容集合 $K = \{f \geq \mathbf{0} : Bf = d\}$ 上で $F = c$ なので，最適性条件は

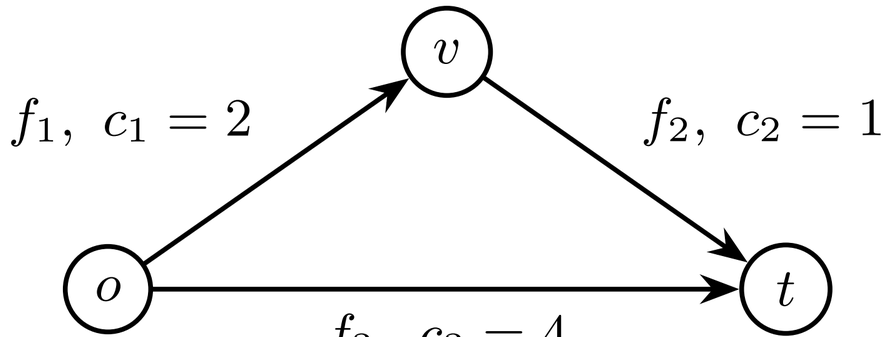
$$\mathbf{0} \in c + N_K(f).$$

✍ LP = linear program. 線形計画法 (linear programming) の名残で LP と呼ぶ方が通りがよい.

# 例 三角ネットワークの最小費用流

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad d = (Q, 0, -Q)^\top.$$

$$f(t) = (t, t, Q - t), \qquad 0 \le t \le Q.$$




費用は $c = (2, 1, 4)$．従って

$$\langle c, f(t) \rangle = 3t + 4(Q - t) = 4Q - t.$$

最小点は $t = Q$：$f^* = (Q, Q, 0)$，最適値は $3Q$.

# 双対価格による下界の構成

$Q = 1$ とする．各ノードに自由な実数 $p_i$ を置き，保存則 $Bf = d$ を重み付けする．

$$\langle p, d \rangle = \langle p, Bf \rangle = \langle B^\top p, f \rangle.$$

もし $B^\top p \le c$ なら，$f \ge \mathbf{0}$ より

$$\langle p, d \rangle \le \langle c, f \rangle \qquad \forall f \ge \mathbf{0},\ Bf = d.$$

- 三角ネットワークでは $p = (3, 1, 0)$ とすると

$$B^\top p = (2, 1, 3) \le (2, 1, 4) = c.$$

- 全ての許容フローの費用は $\langle p, d \rangle = 3$ 以上． $f^* = (1, 1, 0)$ は費用 3 なので最適．

✍ 保存則は等式なので，重み $p_i$ に非負制約は必要ない．

# 最小費用流の双対問題

最も大きな下界を求める問題を Lagrange **双対問題** (dual problem) と呼ぶ.

**主問題 (primal)**

$$\begin{aligned} \min_{f} \quad & \langle c, f \rangle \\ \text{s.t.} \quad & Bf = d, \qquad (p) \\ & f \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**双対問題 (dual)**

$$\begin{aligned} \max_{p} \quad & \langle p, d \rangle \\ \text{s.t.} \quad & B^{\top} p \leq c, \qquad (f) \\ & p \text{ 自由}. \end{aligned}$$

- 主実行可能な $f$ は最適値の **上界**，双対実行可能な $p$ は **下界** を与える.
- **LP の強双対性**：主問題が実行可能・最適値が有限なら，両問題に最適解が存在し最適値は一致.

✍ 一般の凸問題と異なり，LP では厳密な不等式を満たす点の存在を要求しない.

# ノード・ポテンシャルと被約費用 (reduced cost)

目的地で $p_t = 0$ と基準化し，双対変数 $p_i$ を $i$ から目的地への費用の評価値（**ノード・ポテンシャル**）と呼ぶ．リンク $e : i \to j$ では $(B^\top p)_e = p_i - p_j$ なので，双対制約は

$$p_i - p_j \le c_e \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{p_i}_{i \text{ での評価値}} \le \underbrace{c_e + p_j}_{\text{リンク費用} + j \text{ での評価値}}.$$

この差を **被約費用** と呼ぶ：

$$r_e \equiv c_e + p_j - p_i \ge 0, \qquad r = c - B^\top p.$$

**例** 三角ネットワークで $(p_o, p_v, p_t) = (3, 1, 0)$ とすると

$$r_1 = 2 + 1 - 3 = 0, \qquad r_2 = 1 + 0 - 1 = 0, \qquad r_3 = 4 + 0 - 3 = 1.$$

✍ $v$ 経由の2リンクでは費用と評価値が釣り合う．直通リンクには評価値に比べて1だけ余分な費用がある．

# ギャップとリンクごとの相補性

主・双対実行可能な $(f, p)$ では，保存則 $Bf = d$ よりギャップ (gap) は

$$G(f,p) \equiv \langle c, f\rangle - \langle p, d\rangle = \langle \underbrace{c - B^\top p}_{r \geq \mathbf{0}}, f\rangle = \sum_e \underbrace{r_e}_{\geq 0}\underbrace{f_e}_{\geq 0}.$$

主・双対最適解では **双対ギャップ** (duality gap) $G = 0 \Rightarrow$ 利用リンクの被約費用は $0$.

$$G = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_e r_e = 0 \quad \forall e : i \to j \qquad (\textbf{相補性};\ \text{complementarity}).$$

$$f_e > 0 \implies r_e = 0 \iff p_i = c_e + p_j.$$

**例** $p = (3, 1, 0)$ では $r_3 = 1$ なので，最適解は直通リンクを使わず $f_3 = 0$.

✍ $r_e = 0$ でも $f_e = 0$ はあり得る．また最適値 $v^*$ に対し $0 \leq \langle c, f\rangle - v^* \leq G(f, p)$.

# ノード・ポテンシャルと最短路

リンクごとの関係 $c_e = p_i - p_j + r_e$ を，$o$ から $t$ への経路 $P$ 上で足す．途中のノードのポテンシャルは打ち消し合うので

$$\sum_{e \in P} c_e = p_o - p_t + \sum_{e \in P} r_e \geq p_o - p_t.$$

- $p_o - p_t$ は全経路の費用の下界．相補性を満たす利用経路は全リンクで $r_e = 0$ なので，下界を達成する **最短路**．（三角NW：$v$ 経由 $3 = 3 + 0$，直通 $4 = 3 + 1$）
- $p_t = 0$ なら，目的地へ到達可能なノードの $p_i$ は $t$ までの残り費用の下界．相補性を満たす利用経路上では，残り費用に一致する．

✍ 価格差に意味がある．$B^\top \mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{1}, d \rangle = 0$ より，共通定数を加えても双対制約・目的値は変わらず，$p_t = 0$ と正規化できる．

# 最小費用流問題の法錐・KKT条件・双対性

被約費用 $r$ と相補性を，最適性条件 $\mathbf{0} \in c + N_K(f)$ と対応づけよう．

フロー多面体 $K = \{f \geq \mathbf{0} : Bf = d\}$ の法錐は，$s$ を非負制約の乗数として

$$N_K(f) = \{B^\top \nu - s : \nu \text{ 自由},\ s \geq \mathbf{0},\ s_e f_e = 0\ \forall e\}.$$

一次の必要条件に $\nu = -p$ を代入すると

$$c - B^\top p - s = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad s = c - B^\top p = r.$$

すなわち，**非負制約の乗数 $s$ がリンクの被約費用 $r$** であり，最適性条件は

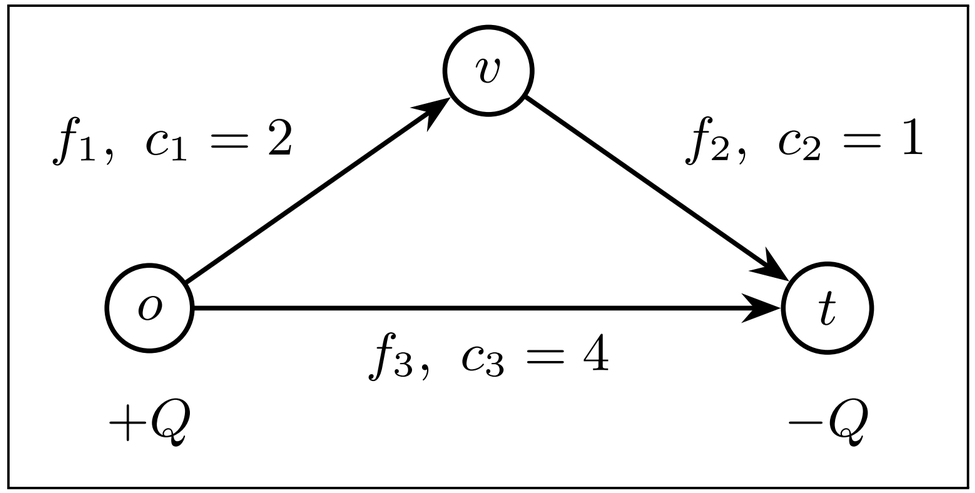
$$Bf = d, \quad f \geq \mathbf{0}, \quad r = c - B^\top p \geq \mathbf{0}, \quad f_e r_e = 0 \quad \forall e.$$

✍ 明示的に $L(f, p, s) = \langle c, f\rangle + \langle p, d - Bf\rangle - \langle s, f\rangle$ を用いたKKT条件を導出し確認してみよ．

# 例 三角ネットワークの最適性条件

$Q = 1,\ c = (2, 1, 4)$ に対する最適解では $f^* = (1, 1, 0),\ p^* = (3, 1, 0),\ r^* = (0, 0, 1).$

1. **主実行可能性**：$Bf^* = (1, 0, -1) = d,\ f^* \geq 0.$
2. **双対実行可能性**：$B^\top p^* = (2, 1, 3) \leq c.$
3. **相補性**：$f_e^* r_e^* = 0\ \forall e.$
4. **ギャップ**：$\langle c, f^* \rangle - \langle p^*, d \rangle = 3 - 3 = 0.$




フローだけでなく双対価格と相補性条件を提示すれば最適性を確認できる.

✍ 他のフローを列挙する必要はない．等式・不等式・相補性を確認すれば全ての許容フローとの比較と同値.

# 双対価格による感度解析

費用 $c$ を固定し，外生供給を $d$ から $d'$ に変える．最適値を $V(d)$ とする．

$d$ における双対最適価格 $p^*$ は $d'$ に対しても双対実行可能なので

$$V(d') \geq \langle p^*, d' \rangle = V(d) + \langle p^*, d' - d \rangle.$$

- $p^*$ は供給パターンを変えた際の最適費用の下界を与える．
- その方向で $V$ が微分可能なら，$\langle p^*, \delta d \rangle$ が限界費用．
- 単一ODの需要を増やすなら $\delta d = \delta Q(e_o - e_t)$．限界費用は $p^*_o - p^*_t$．
  この例では $V(Q) = 3Q$．

✍ 双対解が複数ある点では最適値関数に折れ曲がりが生じ得る．また $\langle \mathbf{1}, \delta d \rangle = 0$ なので，価格の正規化はこの評価を変えない．



# 輸送問題

# 2×2輸送問題の解と最適面

2×2輸送問題を考える.

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = 3t + 7(1-t) = 7 - 4t.$$

- 最適解は $X^* = X(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，費用は $3$.
- $\widetilde{C} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ なら両端の費用は $4$．目的値は線分上で一定 $\Rightarrow$ **全ての** $X(t)$ **が最適**.
- LPの最適解集合は多面体の面.「端点が最適」と「全ての最適解が端点」は異なる.

# 輸送問題の双対価格

行と列の保存則に自由な価格 $u_i, v_j$ を対応させる.

**主問題**

$$\min_{X \geq \mathbf{0}} \quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j} x_{ij} = a_i, \qquad (u_i)$$

$$\sum_{i} x_{ij} = b_j. \qquad (v_j)$$

**双対問題**

$$\max_{u,v} \quad \sum_{i} a_i u_i + \sum_{j} b_j v_j$$

$$\text{s.t.} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad (x_{ij})$$

$$u_i, v_j \text{ 自由.}$$

ギャップは　$G(X,u,v) = \sum_{i,j} (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} \geq 0.$

✍ **二部ネットワーク** として $p_{s_i} = u_i$, $p_{t_j} = -v_j$ とおけば，$p_{s_i} - p_{t_j} \leq c_{ij}$．フローの双対と同じ式.

## 例 輸送計画 (transportation plan) の最適性

$a = b = (1, 1),\ u = (1, 2),\ v = (0, 0)$ を選ぶと

$$R = [c_{ij} - u_i - v_j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \geq 0, \qquad \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j = 3.$$

$X^* = X(1)$ の利用リンクは $R_{ij} = 0$. 主・双対目的関数値がともに 3 なので最適.

一般の候補 $X(t)$ のギャップは $G = 3x_{12} + x_{21} = 4(1 - t)$.

## 話題 割当問題 (assignment problem)／マッチング (matching)

- 人と仕事，学生と実習先などを組み合わせ，組 $(i, j)$ の費用を $c_{ij}$ とする．同数の対象を一対一に割り当てるとき，$a_i = b_j = 1$，$x_{ij} \in \{0, 1\}$ と書ける.
- この割当問題では，整数制約を $x_{ij} \geq 0$ に緩めても，輸送多面体の端点は置換行列になる．したがって**LPを解いて整数の最適割当を一つ選べる**．先の $2 \times 2$ の両端は，二通りの一対一割当に対応する.
- 複数の割当が同費用ならその凸結合もLPの最適解になる．分数解は抽選による割当確率として解釈可能．（実際に一回割り当てるには整数割当を選ぶ必要がある.）
- 双対価格と被約費用は，割当の最適性を確認し，追加の人員・受入枠の価値を考える手掛かりになる．ただし，費用最小割当が当事者の選好に関して安定なマッチングになるとは限らない.

# 話題 エントロピー正則化最適輸送 (entropic OT)

**最適輸送 (optimal transport; OT)** は，供給分布 $a$ を需要分布 $b$ へ移す費用を最小化する．離散分布の場合は先の輸送LPであり，$c_{ij}$ を地点間の距離などから定める.

$$\min_{X \geq \mathbf{0}} \quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \varepsilon \sum_{i,j} x_{ij}(\log x_{ij} - 1) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i} x_{ij} = b_j.$$

- $\varepsilon > 0$，$0 \log 0 = 0$ と定めると目的関数は狭義凸であり，非空な輸送多面体上の最適輸送計画は一意になる．正則化は輸送量を広く分散させる方向に働く.
- 全 $a_i, b_j$ が正で総量が等しく費用が有限なら，最適解は $x_{ij} = \alpha_i e^{-c_{ij}/\varepsilon} \beta_j > 0$．行和・列和を交互に合わせる**Sinkhorn法**により，大規模な分布間の対応を計算可能.
- 画像間の画素・特徴の対応付けや，地域間の人口分布の比較に応用可能．$\varepsilon$ は費用と分散のバランスを調整し，$\varepsilon \downarrow 0$ でOT（元のLP）の最適解へ近づく.

# 話題 メカニズム・デザイン (mechanism design)

費用や評価が当事者の私的情報 (private information) なら，申告された値で最適割当を計算するだけでは，正直に申告するとは限らない．**メカニズム・デザイン**は，申告に応じた割当と支払を合わせて設計する．

- 例：公共施設の利用枠や財のオークションで，誰に割り当て，いくら徴収するかを決める．目的は期待社会厚生の最大化や期待収入の最大化などである．
- **誘因両立性 (IC)**：他者の申告を固定したとき，虚偽申告より正直な申告の効用が高いか等しい．**個人合理性 (IR)**：参加時の効用が不参加時の効用以上になる．
- 有限のタイプ・結果と，準線形な効用を仮定し，ランダム割当を許せば，割当確率と期待支払を変数として，実行可能性・IC・IRを線形制約で書ける．タイプ分布を所与とする期待厚生・期待収入も線形ゆえ，**LPとして制度を設計できる**．

## 問 確認問題

三角ネットワークに戻る．$Q = 1,\ c = (2, 1, 4),\ d = (1, 0, -1)$．二つの出力が「最適解」と報告された．

| | $f$ | $p$ | 主目的値 | 双対目的値 |
|---|---|---|---|---|
| A | $(1/2, 1/2, 1/2)$ | $(3, 1, 0)$ | $3.5$ | $3$ |
| B | $(0, 0, 1)$ | $(4, 1, 0)$ | $4$ | $4$ |

1. 非負性・保存則・被約費用・相補性を独立に再計算せよ．
2. 出力Aの誤りは何か．出力Bはギャップがゼロなら最適と言えるか．
3. 最適な組 $(f, p)$ に修正し，費用の上界・下界を示せ．

✍ 報告された目的値だけでなく，元の $B, c, d$ から各条件を計算し直す．

## 問 確認問題の解答

- **出力A**：主・双対は実行可能．$r = (0, 0, 1)$，$f_3 r_3 = 1/2$，$G = 1/2$．直通の流量を $v$ 経由へ移すと費用が下がる．
- **出力B**：主問題は実行可能だが

$$B^\top p = (3, 1, 4), \qquad r = c - B^\top p = (-1, 0, 0).$$

双対実行可能ではないので，$\langle p, d \rangle = 4$ は正しい下界ではない．

- **修正**：$f^* = (1, 1, 0)$，$p^* = (3, 1, 0)$．主・双対実行可能で $G = 0$．

## 問 まとめクイズ

1. 凸な $K$ 上で $\mathbf{0} \in \nabla f(x) + N_K(x)$ を満たした．$x$ の大域最適性を結論するための，目的関数に関する条件は何か．
2. フロー候補の主・双対目的値が等しい．どの実行可能性を確認すれば証明書になるか．被約費用を使って答えよ．
3. 割当問題で $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ なら，必ず $x_{ij} > 0$ か．

# まとめクイズの解答と次回予告

1. $f$ が $K$ 上で凸．狭義凸性は一意性の条件で，十分性には不要.
2. $Bf = d,\ f \geq \mathbf{0}$ と $r = c - B^\top p \geq 0$．これらの下で $G = 0$ なら最適.
3. 必ずしもそうではない．相補性は $x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0$.

第4講：**均衡問題の種々の等価表現**.

$$\mathbf{0} \in F(x) + N_K(x) \iff \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

$F$ が勾配でない場合の一般の均衡問題について幾何学的考察を続け，等価表現を知る.





# 付録

# 凸問題におけるKKTの十分性

$f, g_i$ は共通の開凸定義域 $D$ 上で凸かつ微分可能，$h_j$ は affine とする．KKTを満たす $(x^*, \lambda^*, \nu^*)$ を固定する.

- $\lambda^* \geq \mathbf{0}$ なので $L(\cdot, \lambda^*, \nu^*)$ は凸．停留性より

$$L(y, \lambda^*, \nu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \qquad \forall y \in D.$$

- 相補性と等式制約より $L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f(x^*)$.
- 実行可能な $y$ では $L(y, \lambda^*, \nu^*) \leq f(y)$.

従って

$$f(y) \geq L(y, \lambda^*, \nu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f(x^*).$$

$x^*$ は大域最適解．この証明にSlater条件は使わないことに注意する.

# フローLPのLagrange双対問題の導出

非負制約 $f \geq \mathbf{0}$ を残し，等式制約だけをLagrange関数に追加する：

$$L_0(f, p) = \langle c, f \rangle + \langle p, d - Bf \rangle = \langle p, d \rangle + \langle c - B^\top p, f \rangle.$$

$$\Longrightarrow \quad q(p) = \inf_{f \geq \mathbf{0}} L_0(f, p) = \begin{cases} \langle p, d \rangle & (c - B^\top p \geq \mathbf{0}), \\ -\infty & (\exists e : (c - B^\top p)_e < 0). \end{cases}$$

- 被約費用 $r = c - B^\top p$ が負の成分があれば $f_e \to \infty$ として $L_0 \to -\infty$.
- 被約費用が非負なら $f = \mathbf{0}$ がこの内側の最小化を達成する.
- 従って $\max_p q(p)$ は $\max\{\langle p, d \rangle : B^\top p \leq c\}$.

✍ $q(p)$ の定義内部の $f$ は元の保存則を満たす必要がない．保存則はすでにLagrange関数が表現している.

# 単体上のKKT条件と均衡条件

$$\min_{x\in\Delta_n} f(x), \qquad \Delta_n=\{x\ge 0:\langle \mathbf{1},x\rangle=1\}.$$

法錐の具体的表示（第2講）から

$$\nabla f(x)+\nu\mathbf{1}-s=\mathbf{0}, \qquad s\ge 0, \quad s_i x_i=0.$$

$$\Rightarrow \kappa=-\nu \text{ とおけば} \quad \begin{cases} \partial_i f(x)=\kappa & (x_i>0),\\ \partial_i f(x)\ge\kappa & (x_i=0). \end{cases}$$

費用 $c=\nabla f$ なら，利用行動は最小費用，未利用行動はそれ以上.

利得 $U=-\nabla f$ なら，利用行動は最大利得，未利用行動はそれ以下.

✍ $f$ によって利得を表現できるならば，集団ゲームの均衡はその $f$ の $\Delta_n$ 上の一次の条件を満足する.

# 条件付き定値性 (conditional positive definiteness)

低次元集合上での曲率を評価する条件．全空間に対する通常の定値性の制限版.

$K$ は方向空間 $L = \mathrm{span}(K - K)$ を持つ凸集合．$f$ は近傍で $C^2$ とする.

$$\text{(c.p.d.)} \qquad h^\top \nabla^2 f(x) h \geq 0 \qquad \forall x \in K, \quad \forall h \in L$$

なら，各線分上の二階微分が非負なので $f$ は $K$ 上で凸.

同様に，$x \in K$, $h \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ で正なら，$f$ は $K$ 上で狭義凸.

# 非有界なフロー集合における最小費用解の存在

$K = \{f \geq \mathbf{0} : Bf = d\} \neq \varnothing$，全リンク費用 $c_e > 0$ とする.

任意の実行可能点 $f^0$ を取り，$M = \langle c, f^0 \rangle$ とおく.

$$K_M = \{f \geq \mathbf{0} : Bf = d,\ \langle c, f \rangle \leq M\}.$$

- $K_M$ は非空・閉集合．全ての $f \in K_M$ で$0 \leq f_e \leq M/c_e\ \forall e$．従って $K_M$ は有界であり，コンパクト.
- 連続な線形費用は $K_M$ 上で最小値を達成する．$K \setminus K_M$ の点は $f^0$ よりコストが高いので，この解は $K$ 全体でも最適.

✍ 全費用の厳密な正値性は十分条件．ゼロ費用の循環があれば最適解が非有界な集合をなすことも，負費用の循環があれば下に非有界となることもある.

# 費用が同率の経路とギャップの限界

三角ネットワークで $c = (2, 1, 3),\ Q = 1$ とする.

$$f(t) = (t, t, 1 - t), \qquad 0 \le t \le 1, \qquad \langle c, f(t) \rangle = 3.$$

- $p = (3, 1, 0)$ は双対実行可能．全リンクで $r = c - B^{\top} p = \mathbf{0}$.
- 全ての許容フローが最適．ギャップは全てゼロ.
- ギャップのゼロは最適性を示すが，特定の最適点への近さを示さない.
- 数値計算では最適値が同じでも，返るフローは初期値・解法により異なり得る.

# 2×2エントロピー正則化最適輸送 (entropic OT)

費用 $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ にエントロピー項を加える．$0 \log 0 = 0$ と定義する．

$$\min_{X \in K} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \varepsilon \sum_{i,j} x_{ij}(\log x_{ij} - 1), \qquad \varepsilon > 0.$$

$X = X(t)$ を代入すると

$$\psi_\varepsilon(t) \equiv 7 - 4t + 2\varepsilon\big(t \log t + (1-t)\log(1-t) - 1\big).$$

一次の条件から

$$-4 + 2\varepsilon \log \frac{t}{1-t} = 0, \qquad t_\varepsilon = \frac{1}{1 + \exp(-2/\varepsilon)} \in (0,1).$$

✍ 正則化により目的関数は変わっている．$\varepsilon \downarrow 0$ で $t_\varepsilon \to 1$．同率費用の例では $t_\varepsilon = 1/2$ となる．

# 参考文献

- 寒野善裕・土谷隆『最適化と変分法』：線形最適化，双対性，最適性条件.
- 福島雅夫『非線形最適化の基礎』：制約想定，KKT条件，非線形最適化.
- S. Boyd and L. Vandenberghe, "**Convex Optimization**", 2004.
  ( `https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/` )
  - 第3章：凸関数，第4章：凸最適化問題.
  - 第5章，特に5.2・5.5・5.6節：双対性，KKT条件，感度解析.