2026後期

均衡分析と数理最適化　第２講

許容集合の幾何

京都大学経済研究所　大澤 実

本講の目的

よく登場する凸な許容集合の幾何学的構造について詳しく議論する.

1. 凸集合・面・端点などの基本的定義を学ぶ.
2. 接錐・法錐の定義を学び，第1講の均衡条件を復習する.
3. 単体・非負錐・輸送多面体・フロー多面体を理解する.

✍ 本講では集合 K の幾何に集中して議論する．目的関数の凸性・KKT条件・双対性は第3講，相補性問題 (CP)・変分不等式問題 (VI)・不動点問題 (FP) への帰着は第4講で議論する.

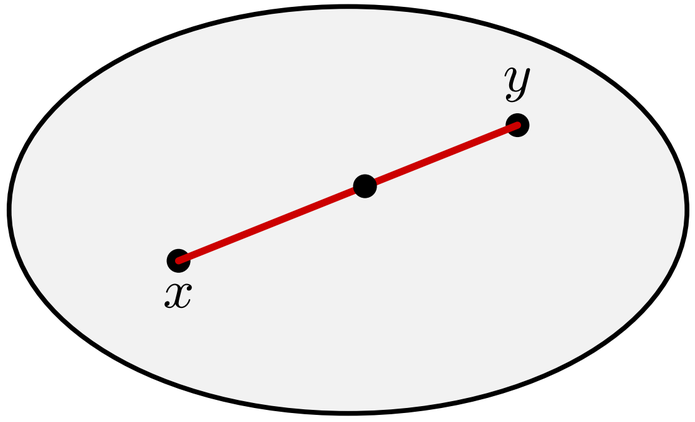


凸集合の幾何学

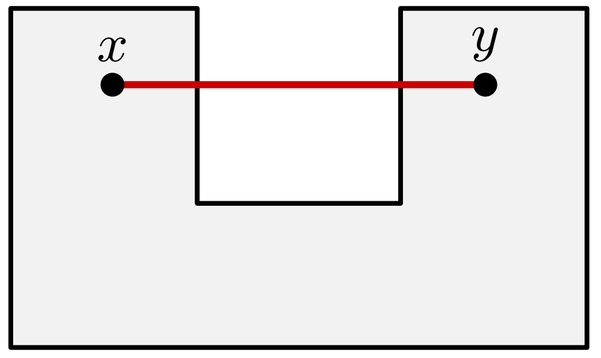
凸集合 (convex set)

定義 $K \subset \mathbb{R}^n$ が **凸集合** であるとは次が成立することをいう：

$$x, y \in K, \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-\alpha)x + \alpha y \in K.$$



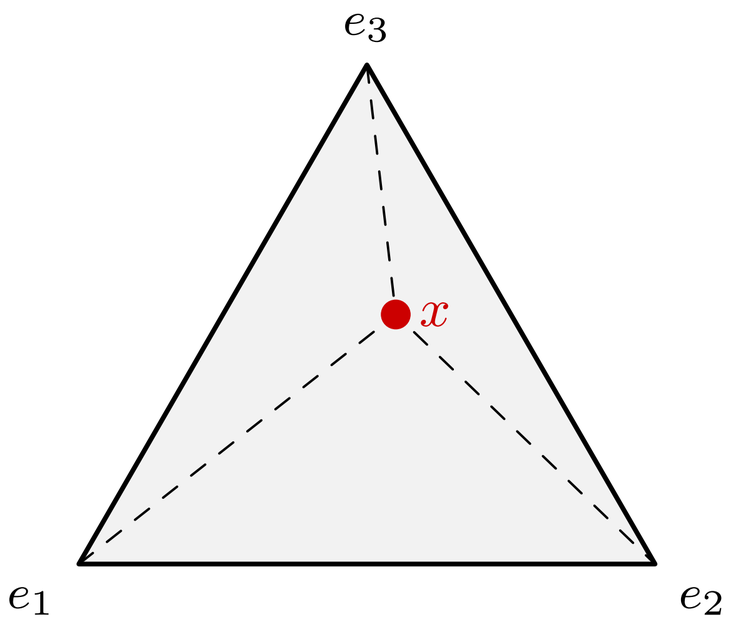
凸：線分がすべて K に入る



非凸：線分の一部が外へ出る

凸結合 (convex combination) と凸包 (convex hull)

定義 $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ とした $\sum_i \alpha_i v_i$ を $\{v_1, \ldots, v_m\}$ の**凸結合** と呼ぶ．また，そのような凸結合全体を $\{v_1, \ldots, v_m\}$ の **凸包** と呼び $\mathrm{co}\{v_1, \ldots, v_m\}$ と書く．



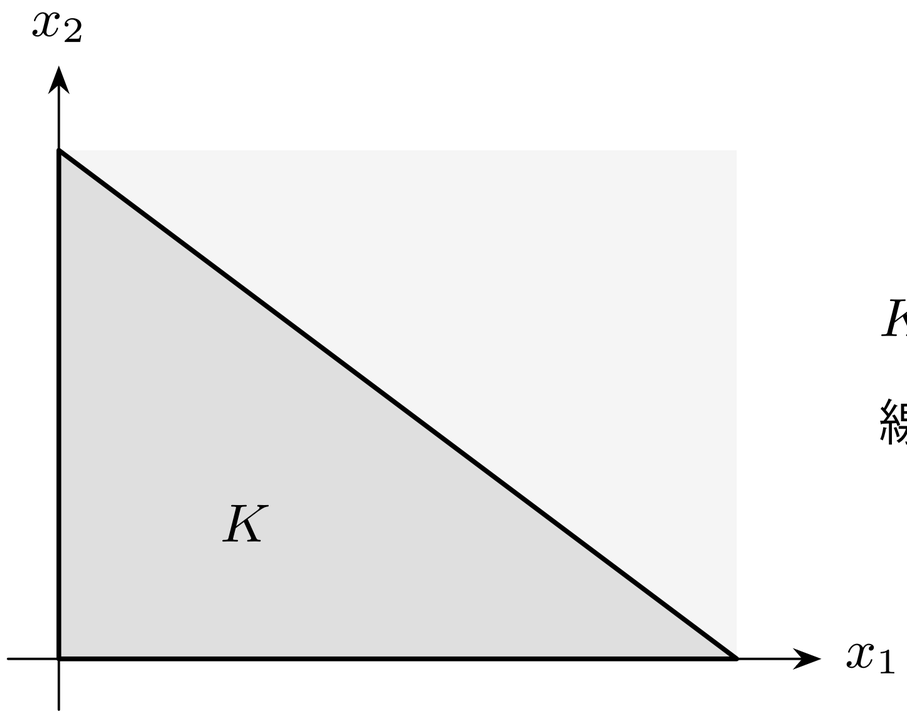
例 $\Delta_n = \{x \geq 0 : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\} = \mathrm{co}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

例 集団ゲームで $x = (.2, .3, .5) = .2e_1 + .3e_2 + .5e_3$.

- 頂点 e_i：全員が行動 i.
- 点 x：各行動の利用比率の分布.
- Δ_n の次元は $n - 1$.

凸集合の例と凸性を保つ演算

- **超平面** $\{x : \langle a, x\rangle = b\}$，**半空間** $\{x : a^\top x \le b\}$，**アフィン集合** $\{x : Ax = b\}$ は凸.
- 凸集合の **共通部分** と **線形写像による像** も凸.



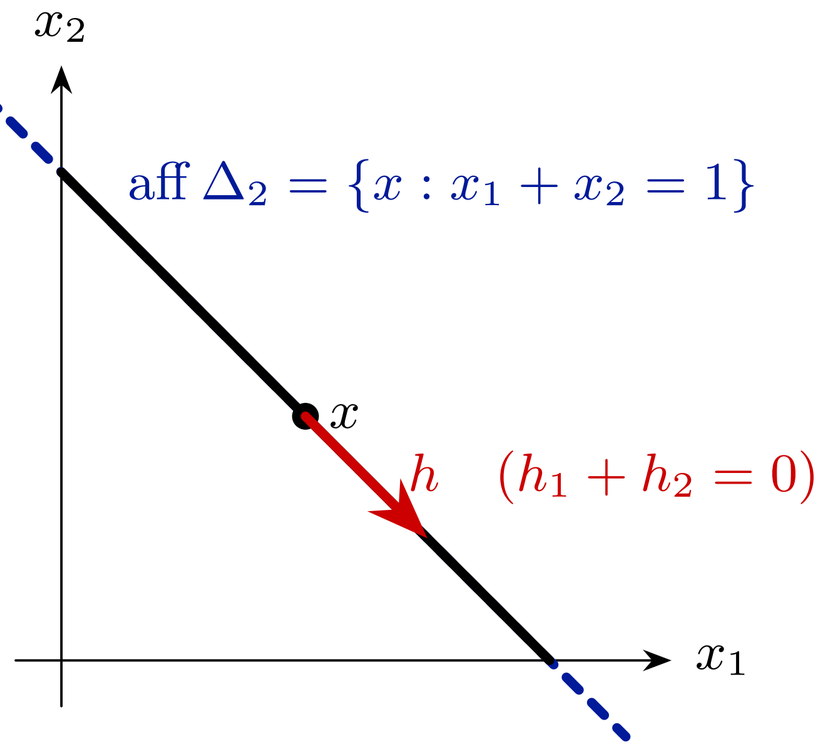
$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \ge \mathbf{0}, 3x_1 + 4x_2 \le 12\}$$

線形不等式制約（半空間）の共通部分 $\Rightarrow$ 凸

問 集合 $\{f \ge \mathbf{0} : Bf = d\}$ が凸であることを確かめよ.

アフィン包 (affine hull)：集合が実際に載っている空間

定義 **アフィン包** $\operatorname{aff} K$ は K を含む最小のアフィン集合．その **方向空間** (direction space) を $L = \operatorname{span}(K - K)$ と書くと，適当な $x^0 \in K$ をとって $\operatorname{aff} K = x^0 + L$.



例 $\operatorname{aff} \Delta_n = \{x : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\}$,

$L_{\Delta_n} = \{h : \langle \mathbf{1}, h \rangle = 0\}$.

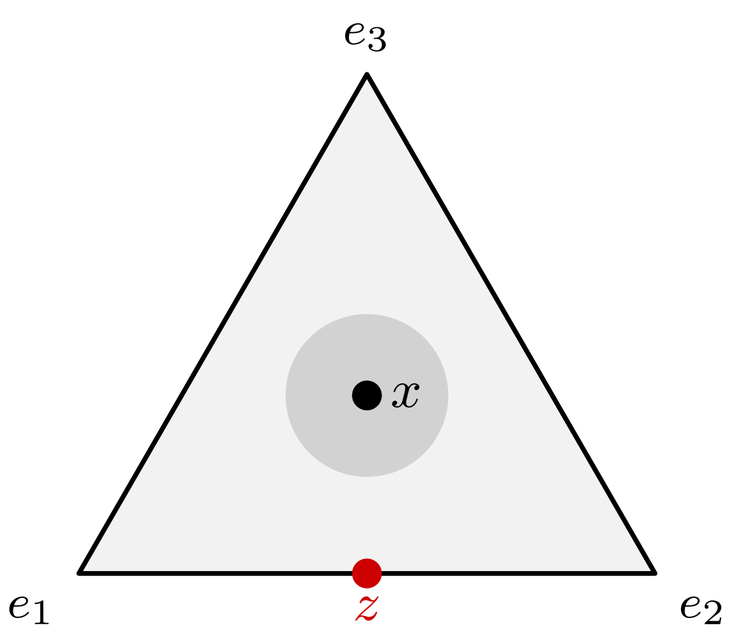
- $h \in L_{\Delta_n}$ は $\operatorname{aff} \Delta_n$ 上の変化量を表現する

  $\because$ 等式制約のもとでは $\langle \mathbf{1}, h \rangle = 0$.

内部 (interior) と相対内部 (relative interior)

定義 **内部** (interior) $\operatorname{int} K$：$x \in \operatorname{int} K \iff \exists \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x) \subset K.$ **相対的内部** $\operatorname{ri} K$ は，aff K の中で見た内部：$x \in \operatorname{ri} K \iff \exists \varepsilon > 0 : \ (x + L) \cap B_\varepsilon(x) \subset K.$

$$B_\varepsilon(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$$

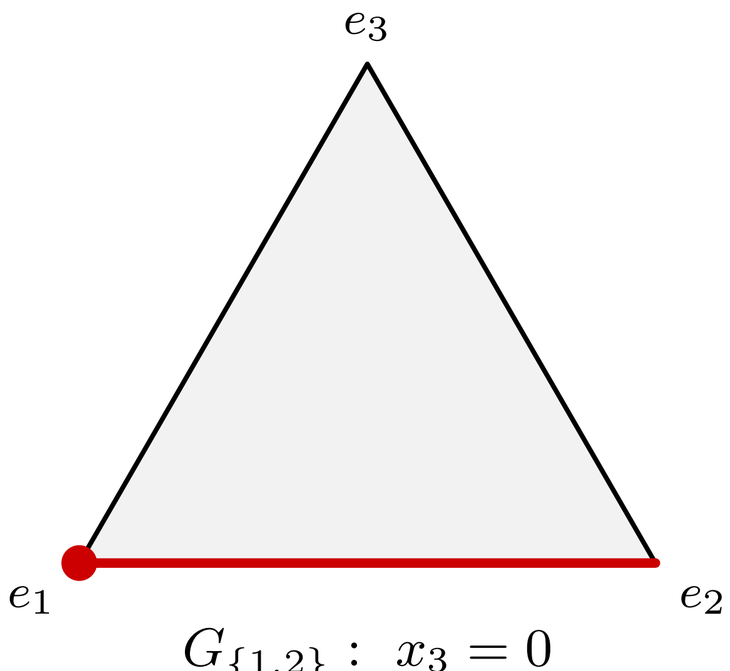


例 $\operatorname{ri} \Delta_n = \{x > \mathbf{0} : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\}.$

- $\mathbb{R}^n$ 内では内部は空集合.
- $x \in \operatorname{ri} \Delta_n$：小さな総量保存の変化を全方向に許す.
- 辺上の z：一部の方向が非負制約に遮られる.

面 (face) と端点 (extreme point)

定義 凸集合 K の凸部分集合 G が **面** $\iff$ $0 < \alpha < 1$, $x, y \in K$ に対し $(1-\alpha)x + \alpha y \in G$ なら $x, y \in G$. 1点だけの面を **端点** と呼ぶ.



$G_{\{1,2\}}:\ x_3 = 0$

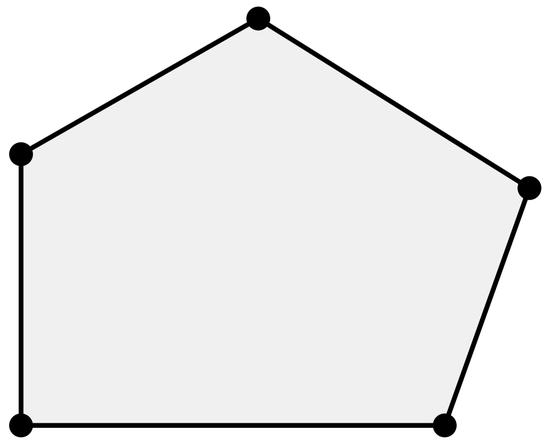
例 単体では，非空な $S \subset \{1, \ldots, n\}$ ごとに

$$G_S = \{x \in \Delta_n : x_j = 0\ (j \notin S)\}.$$

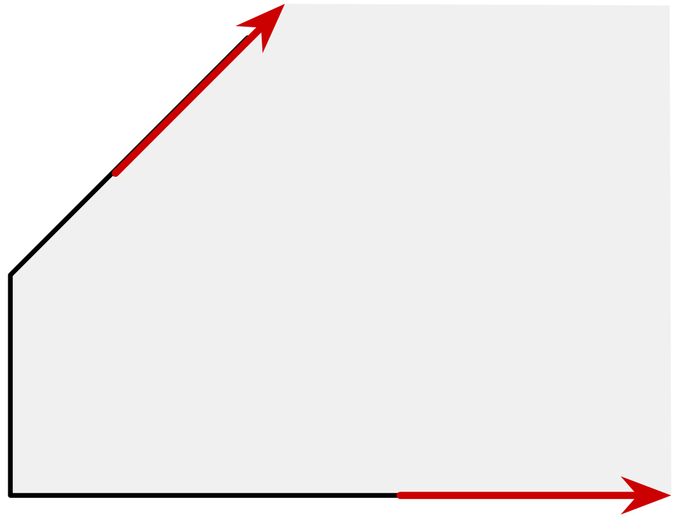
- e_i は端点.
- $x \in \operatorname{ri} G_S \ \Leftrightarrow\ \operatorname{supp}(x) = S$.
- 面 $\subset \mathbb{R}^2$ であるとは限らない.

多面体と多角形

定義 有限本の線形等式・不等式で表される集合が **多面体** (polyhedron, polyhedral set). 有界な多面体を特に **多角形** (polytope) と呼ぶことがある.



多角形：有界・端点の凸包



多面体：非有界・無限に伸びる方向を持つ

✍ Δ_n は多角形，$\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ は非有界であり多面体．線形制約で書けるだけでは，有界性は保証されない.

コンパクト性 (compactness)

有限次元 $\mathbb{R}^n$ では **コンパクト** $\iff$ **閉かつ有界**.



$[0,1]$：閉・有界　　$(0,1]$：有界・非閉　　$[0,\infty)$：閉・非有界

- **閉 (closed)**：集合内の点列の極限もその集合に含まれる.
- **有界 (bounded)**：全ての点をある有限半径の球に収められる.

例 単体は **閉かつ有界**，したがってコンパクト.

凸性・コンパクト性の役割

- **凸性**：常に2点を結ぶ線分上で比較できる．接錐・法錐や射影がよい性質をもつ．
- **コンパクト性**：集合上で有限な極限がとれるかに関係し，存在性の保証などを容易にする．連続関数は非空コンパクト集合上で最小値・最大値を達成する．

例

- 閉ではない集合の場合：$\min\{x : x \in (0, 1]\}$：下限は 0だが達成されない．
- 非有界の場合：$\min\{-x : x \geq 0\}$：目的値を下げながら無限に逃げられる．

✍ Kの非空・コンパクト・凸性とFの連続性はVIの解の存在を保証する標準的条件（第4講）．なおこれらは存在の十分条件であり，非有界集合でも解が存在する場合はある．

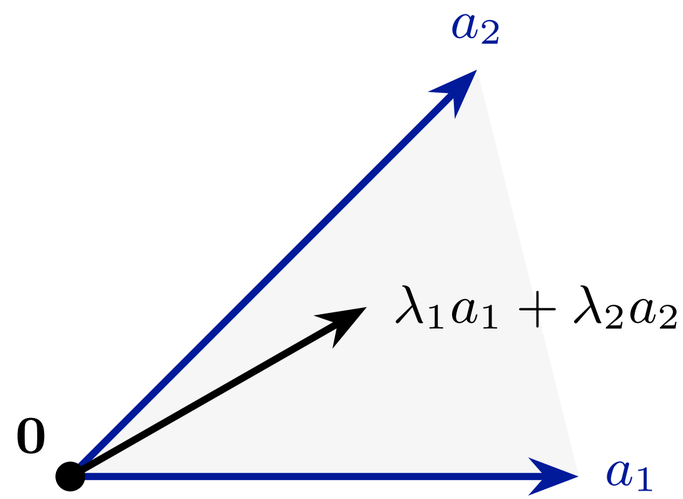
 接錐と法錐

- 正確な定義を導入する.
- 単体を中心に具体的表示を確認する.

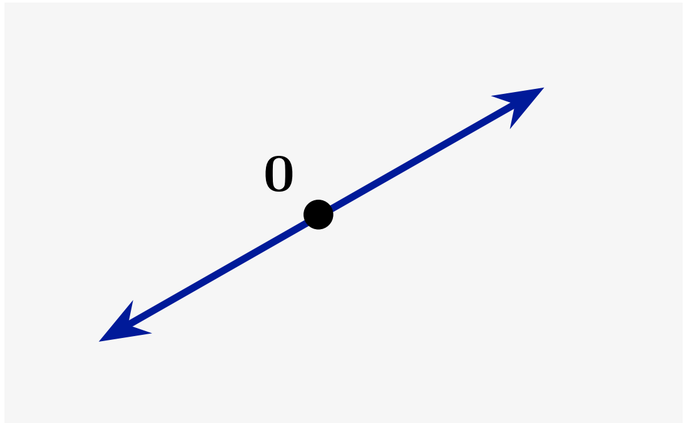
錐 (cone)

定義 $h \in C,\ t \geq 0$ なら $th \in C$ となる集合 C を **錐** と呼ぶ.

$\{a_i\}$ の非負の線形結合 $\mathrm{cone}\{a_1, \ldots, a_m\} = \{\sum_i \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0\}$ は **凸錐** (convex cone).



2方向 a_1, a_2 で生成される凸錐



線形空間も錐

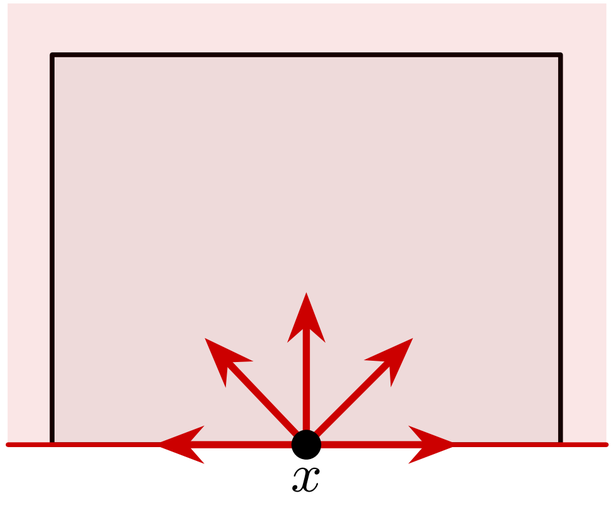
✍ 接錐・法錐はベクトルの集合であり必ず $\mathbf{0}$ を含む．図では始点を x に移して描くことがある.

接方向と接錐：局所的にどちらへ動けるか

以下，K は非空な凸集合とする.

定義 $x + th \in K$ が全ての十分小さな $t \geq 0$ で成立する h を **許容方向** (feasible direction) と呼ぶ．その全体を閉化して得られる錐を **接錐** (tangent cone) と呼ぶ：

$$T_K(x) = \overline{\mathrm{cone}(K - x)} = \overline{\{t(y - x) : t \geq 0,\ y \in K\}}.$$

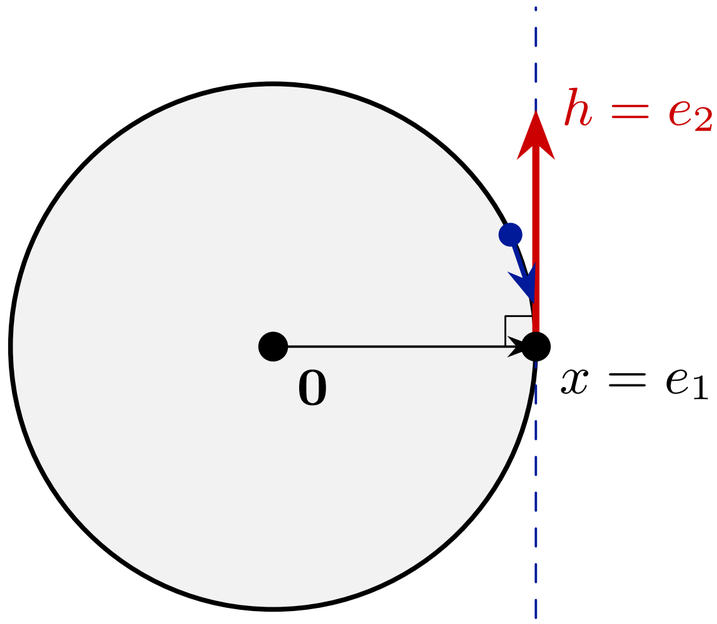


$\mathbb{R}^2$ の長方形の辺上では，上向き半平面が $T_K(x)$.

✍ ① $\mathbb{R}^2$ の長方形の相対的内点における $T_K(x)$,
② $\mathbb{R}^3$ の立方体の内点における $T_K(x)$ は何か？

接方向 (tangent direction)

定義 接錐 $T_K(x)$ の要素を $x \in K$ における **接方向** と呼ぶ.



例 単位円盤 $K = \{z : \|z\| \le 1\}$ では

$$T_K(e_1) = \{h : h_1 \le 0\}.$$

e_2 は接錐の要素だが許容方向ではない：

$$\|e_1 + te_2\| > 1 \quad (t > 0).$$

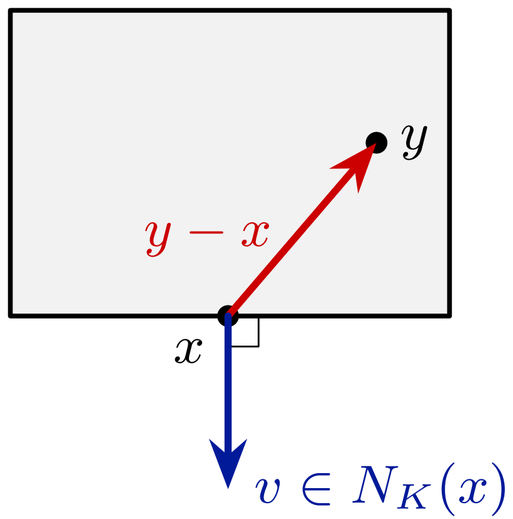
曲線に沿う移動の極限として現れる.

法錐 (normal cone)

定義 凸集合 K の $x \in K$ における **法錐** (normal cone) は

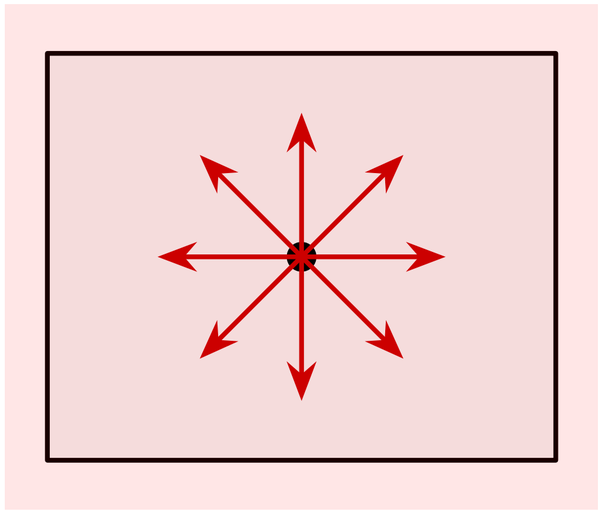
$$N_K(x) = \{v : \langle v, y - x \rangle \leq 0 \ \ \forall y \in K\} = T_K(x)^\circ.$$

ここで錐 C に対して $C^\circ = \{v : \langle v, h \rangle \leq 0 \ \forall h \in C\}$ は C の **極錐** (polar cone).

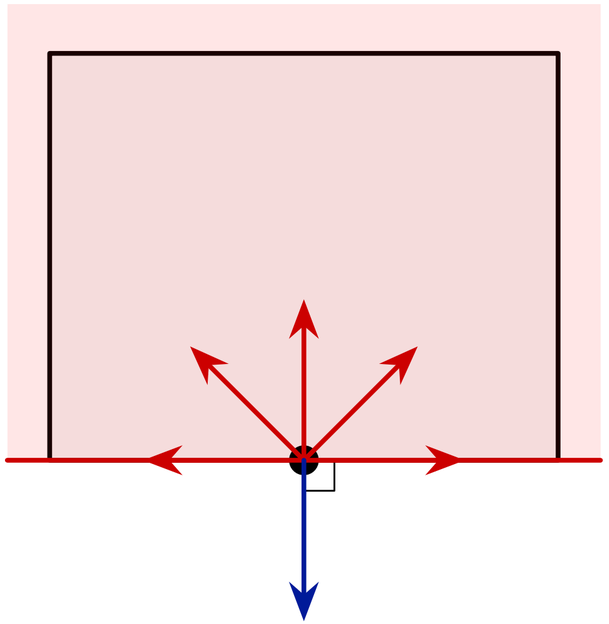


✍ 図の $N_K(x)$ が確かに
$T_K(x)$ の極錐であることを確認せよ.

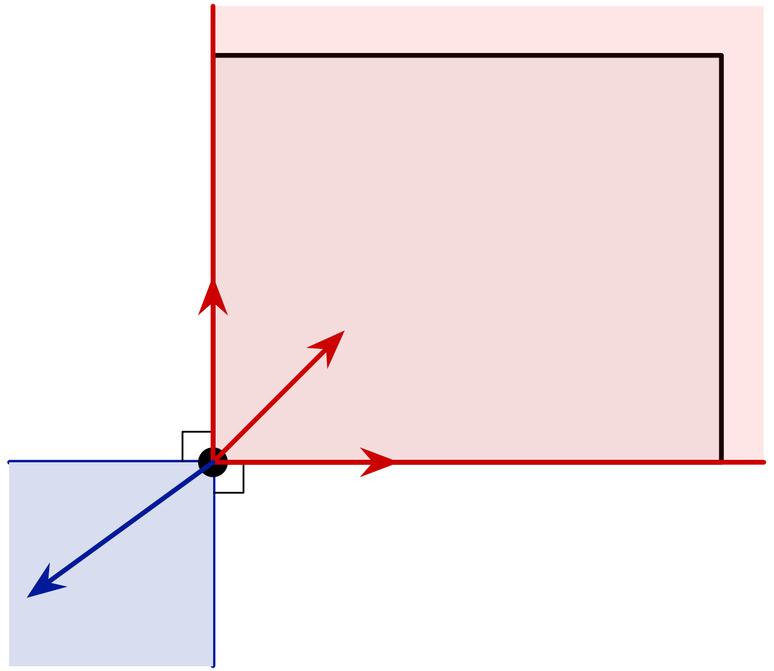
例 $\mathbb{R}^2$ の長方形の接錐と法錐



$T = \mathbb{R}^2, \quad N = \{\mathbf{0}\}$



$T = \{h : h_2 \geq 0\}$
$N = \mathrm{cone}\{-e_2\}$



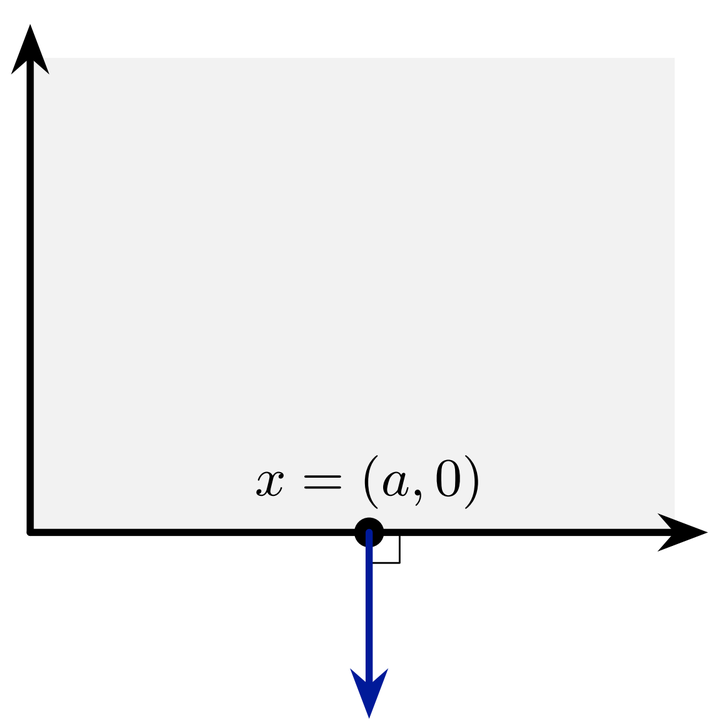
$T = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$
$N = \mathbb{R}^2_{\leq 0}$

✍ 図は接方向と外向き法線を同じ点から描いている.

例 非負象限

$K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，$I_0(x) = \{i : x_i = 0\}$ とおくと

$$T_K(x) = \{h : h_i \geq 0 \ (i \in I_0(x))\},$$
$$N_K(x) = \{v : v_i = 0 \ (x_i > 0),\ v_i \leq 0 \ (x_i = 0)\}.$$



$x = (a, 0)$，$a > 0$：h_1 は自由，$h_2 \geq 0$.

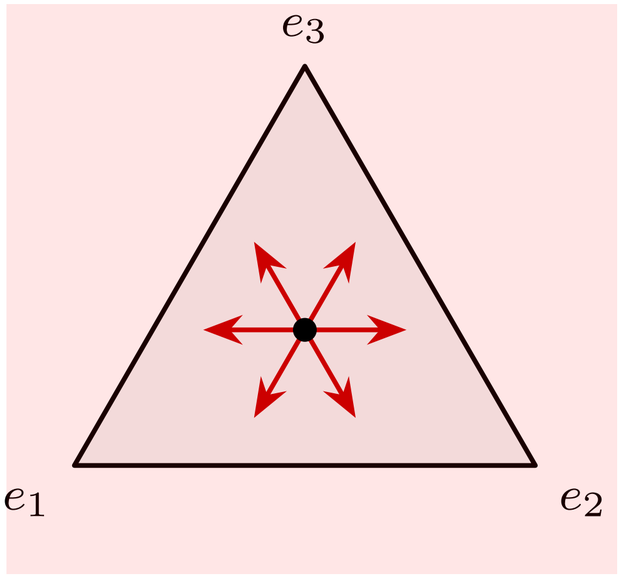
$N_K(x) = \{(0, v_2) : v_2 \leq 0\}$

未利用の成分を減らさない方向のみ許容される.

✍ 非負象限は相補性問題の許容領域として重要.

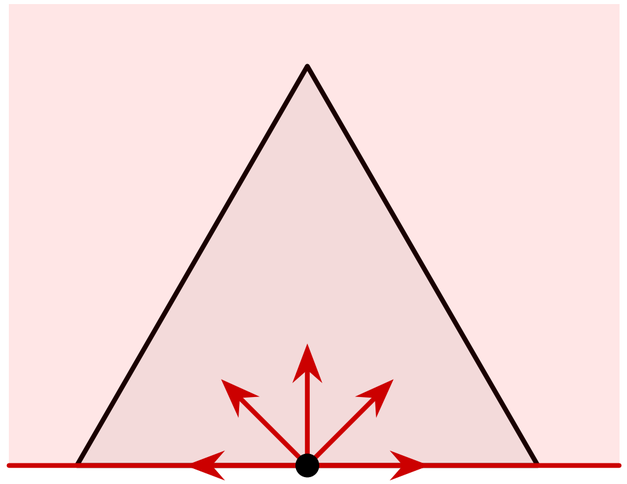
例 単体 $K = \Delta_n = \{x \geq 0 : \langle \mathbf{1}, x \rangle = 1\}$ の接錐

$$T_{\Delta_n}(x) = \{h : \langle \mathbf{1}, h \rangle = 0,\ h_i \geq 0\ (x_i = 0)\}$$



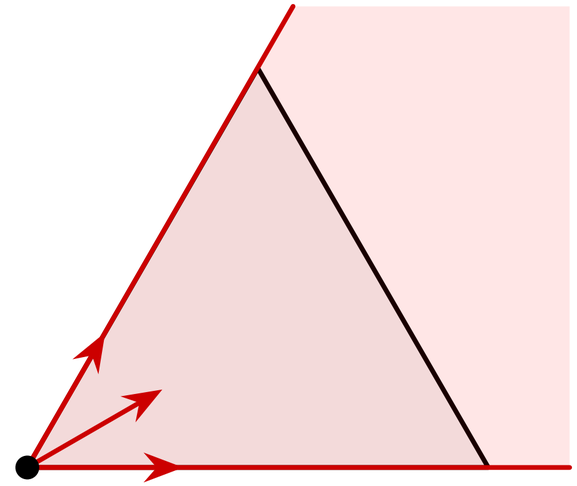
相対内部

$T = L$



辺 $x_3 = 0$

$h_3 \geq 0$ $(h \in L)$



頂点 e_1

$h_2, h_3 \geq 0$ $(h \in L)$

✍ 三角形の図 (ternary/simplex diagram) は L の2次元表示. **接錐は常に $L \subset \mathbb{R}^3$ に含まれる.**

例 単体の法錐

$$N_{\Delta_n}(x) = \{v : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad v_i = \lambda \ (x_i > 0), \quad v_i \leq \lambda \ (x_i = 0)\}.$$

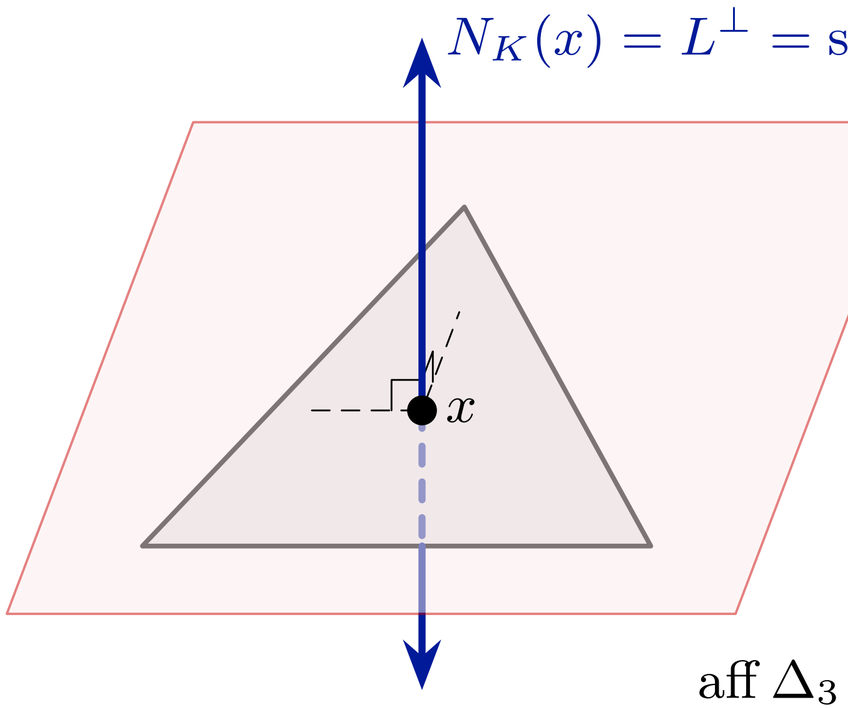
導出：法錐の定義より，$v \in N_{\Delta_n}(x) \iff \langle v, y - x \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in \Delta_n)$. 特に $y = e_i \in \Delta_n$を代入すると，$v_i \leq \langle v, x \rangle =: \lambda \quad (i = 1, \ldots, n)$. 一方，$\sum_i x_i = 1$ より，

$$0 = \lambda - \langle v, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda - v_i).$$

各項は非負であるから，$x_i > 0$ ならば $v_i = \lambda$ が必要．逆に，この条件が成立すれば，任意の $y \in \Delta_n$ に対して $\langle v, y \rangle = \sum_i y_i v_i \leq \lambda \sum_i y_i = \lambda = \sum_i x_i v_i = \langle v, x \rangle$. □

- $x \in \operatorname{ri} \Delta_n$：$N_{\Delta_n}(x) = \operatorname{span}\{\mathbf{1}\}$（ゼロ集合ではない！）
- $x = e_1$：$N_{\Delta_n}(e_1) = \{v : v_1 \geq v_j \ \forall j\}$

例 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた Δ_3 の法錐



$$L = \{h : \langle \mathbf{1}, h\rangle = 0\}, \quad L^\perp = \mathrm{span}\{\mathbf{1}\}.$$

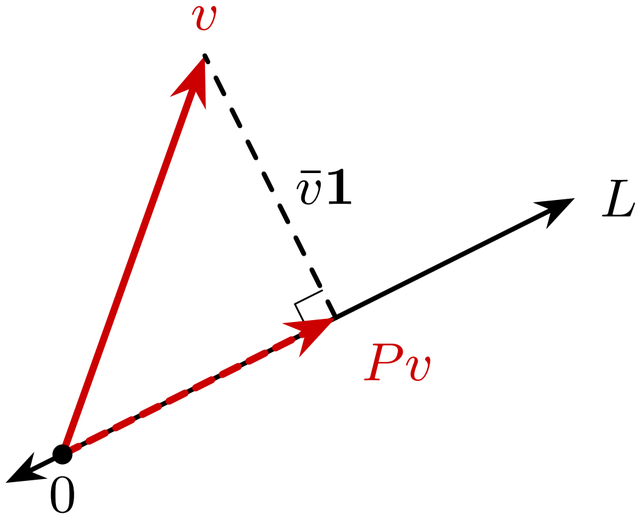
- 法錐には常に $L^\perp$ が含まれる.
- $\mathrm{ri}\,\Delta_n$ では $N_K^L(x) \equiv N_K(x) \cap L = \{\mathbf{0}\}$.

✍ $L^\perp$ を L の **直交補空間** (orthogonal complement) と呼ぶ.

接空間への射影

$L = \{h : \langle \mathbf{1}, h \rangle = 0\}$ への **直交射影** (orthogonal projection) は

$$Pv = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) v = v - \bar{v}\mathbf{1}, \qquad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_i v_i.$$



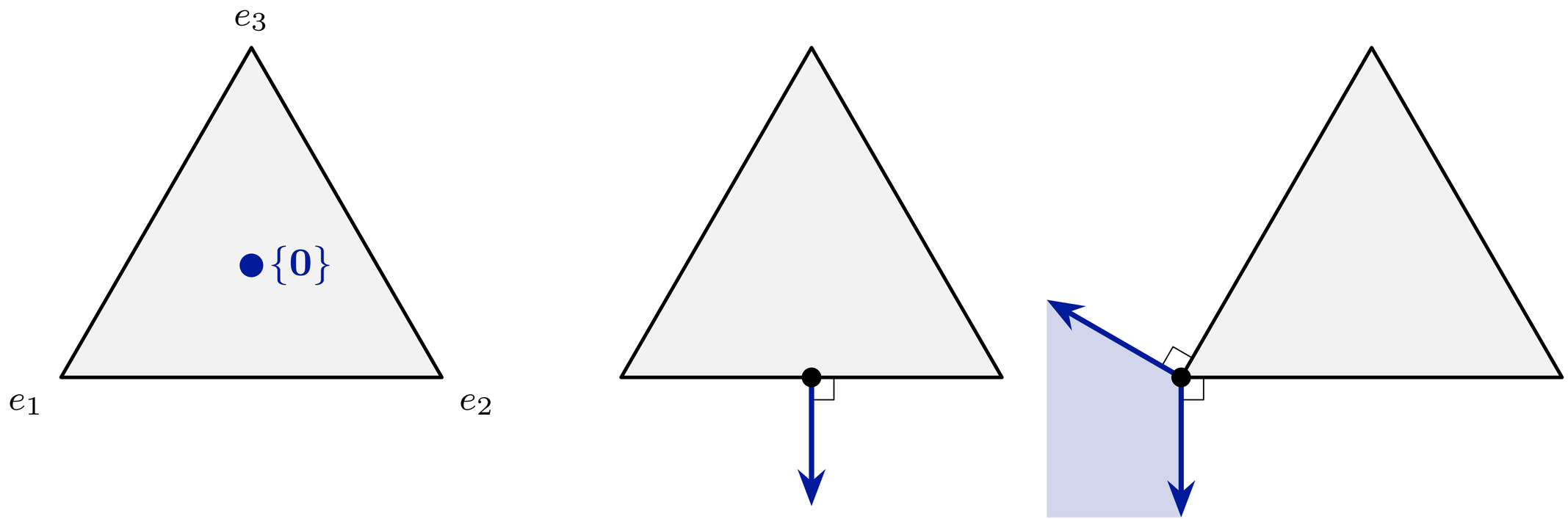
例 $v = (5, 5, 2)$ なら

$$\bar{v} = 4, \qquad Pv = (1, 1, -2).$$

全行動に同じ利得を加えても選択を変える利得差は変わらないことの表現：

$$P(v + a\mathbf{1}) = Pv.$$

例 L へ射影した法錐 N_K^L



$$v \in N_K(x) \iff Pv \in N_K^L(x) = PN_K(x).$$

✍ 外向きの扇形は，その頂点から伸びる **全ての接方向** と内積が非正になる領域.

復習 3行動集団ゲームの均衡条件

費用関数 c なら $F = c$，利得関数 U なら $F = -U$．よって考える変分包含式は

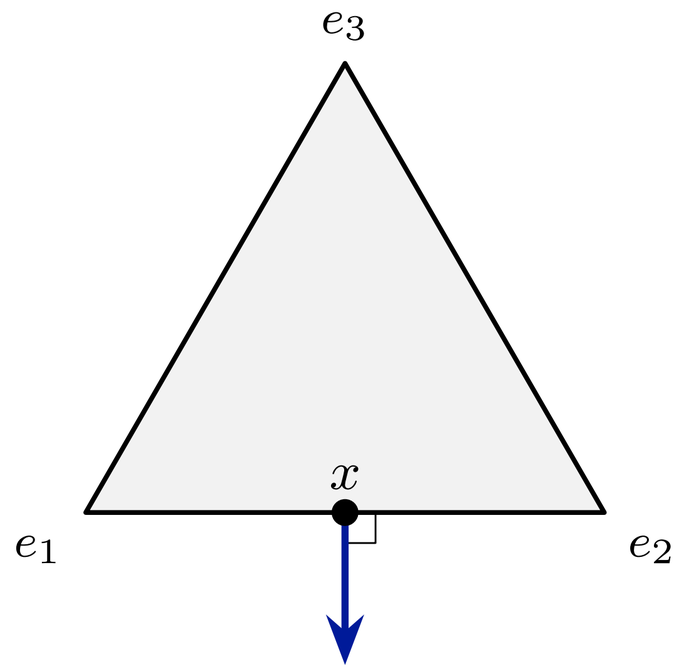
$$0 \in -U(x) + N_{\Delta_n}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad U(x) \in N_{\Delta_n}(x).$$

位置	全空間 $\mathbb{R}^3$ での利得条件	平面内での条件
$\mathrm{ri}\,\Delta_3$	$U_1 = U_2 = U_3$	$PU = \mathbf{0}$
辺 $(x_3 = 0)$	$U_1 = U_2 \geq U_3$	PU が外向き法線上
頂点 e_1	$U_1 \geq U_2,\ U_1 \geq U_3$	PU が外向き扇形内

✍ 候補 x における利得 $U(x)$ を固定して方向を比較する．利得の共通成分はゼロである必要がない．

問 3行動集団ゲームの均衡条件

3行動の候補状態 $x = (1/2, 1/2, 0)$ を考える.



A：$U(x) = (5, 5, 2)$

B：$U(x) = (5, 5, 7)$

C：$U(x) = (6, 4, 2)$

1. A・B・C のうち，この x が Nash 均衡になるものはどれか.
2. 均衡でない場合，利得を改善する許容方向 h を一つ示せ.

問 解答

- **A は均衡**：$U_1 = U_2 = 5 \geq U_3 = 2$.

$$PU = (1, 1, -2) \in N^L_{\Delta_3}(x).$$

- **B は均衡でない**：未利用の行動3の方が高利得.

$$h = e_3 - e_1 \in T_{\Delta_3}(x), \qquad \langle U, h \rangle = 7 - 5 = 2 > 0.$$

- **C は均衡でない**：利用中の行動間でも改善できる.

$$h = e_1 - e_2 \in T_{\Delta_3}(x), \qquad \langle U, h \rangle = 6 - 4 = 2 > 0.$$

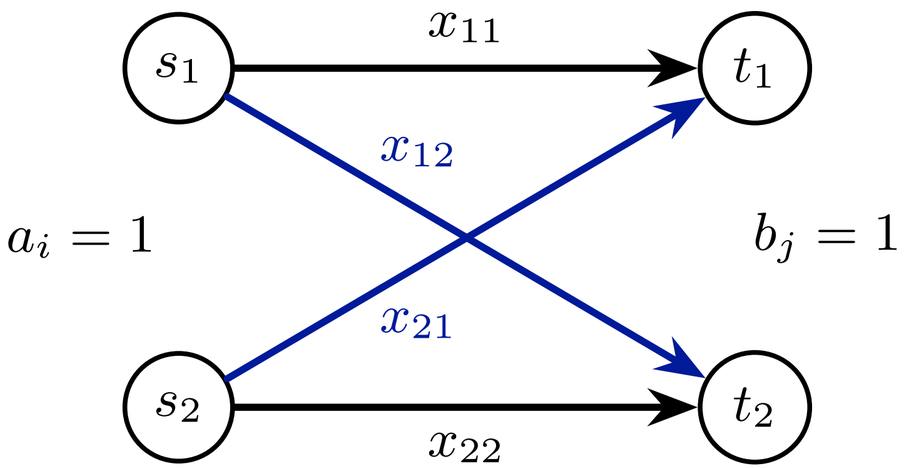


輸送とネットワーク

- ネットワークのフロー保存則がつくる多面体
- ネットワークの均衡フローの基礎

例 単位需要・単位供給の2×2 の輸送パターン

供給量 $a=(1,1)$，需要量 $b=(1,1)$．$x_{ij}\ge 0$ を産地 i から需要地 j への輸送量とすると，その許容集合は $\mathbb{R}^4_{\ge 0}$ の部分集合だが **実質的な自由度は1.**



$$K=\left\{x_{ij}\ge 0 : \textstyle\sum_j x_{ij}=a_i,\ \sum_i x_{ij}=b_j\right\}$$

$t=x_{11}$ とおくと全制約を満たす $X=[x_{ij}]$ は

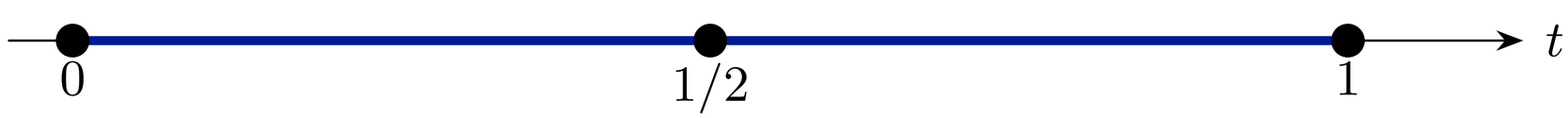
$$X(t)=\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix},\qquad 0\le t\le 1.$$

4本の等式のうち1本は冗長（総供給＝総需要）.

輸送多面体 (transportation polytope)

K は2種類の割り当ての凸結合として表示できる：$\boxed{X(t) = (1-t)X(0) + tX(1)}$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad X(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

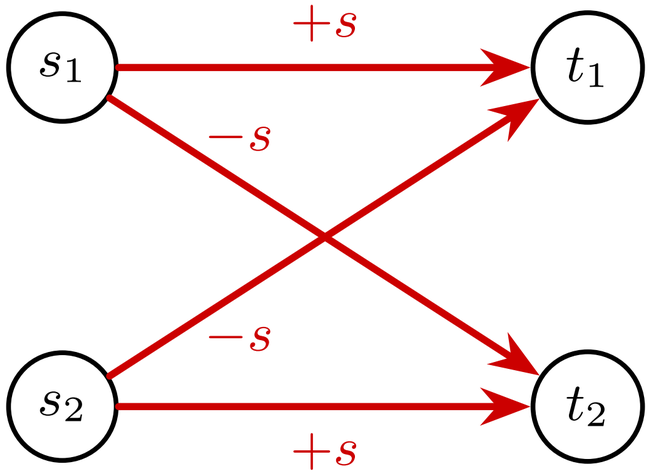


- **端点**：この例では2つの完全な一対一割当 $X(0)$ と $X(1)$.
- 線分の相対内部では全ての地点間で輸送される $(x_{ij} > 0)$.
- 輸送多面体は **閉・有界・凸**：$0 \le x_{ij} \le \min(a_i, b_j)$.

✍ 供給・需要が一様でなくても，総供給と総需要が一致すれば，許容集合は同様に線分となる.

輸送多面体の接方向

循環的なフロー変化パターンは非負性を保ちつつ行と列の和を保存する $=$ 実行可能.



$$H = sD, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $0 < t < 1$：$s \in \mathbb{R}$.
- $t = 0$：$s \geq 0$（対角成分を減らせない）.
- $t = 1$：$s \leq 0$（非対角成分を減らせない）.

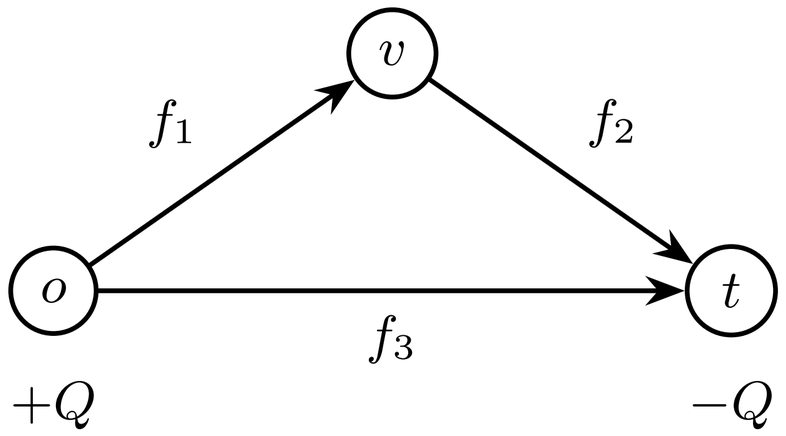
✍ 変化 H の行和・列和はゼロ．各輸送量が正の内部では，この例の方向空間は $\mathrm{span}\{D\}$.

ネットワーク・フロー (network flow)

リンク集合 E・ノード集合 V．**リンク・ノード接続行列** (link–node incidence matrix) $B \in \mathbb{R}^{|V|\times|E|}$ は，$b_{ie} \in \{-1, 0, 1\}$ で，リンクの始点を $+1$・終点を -1・それ以外を 0 とする行列．各点での需要パターンを $d \in \mathbb{R}^{|V|}$ で表すと**リンク・フロー** f **の保存則**を満足する許容領域は多面体 $K = \Big\{ f \geq \mathbf{0} : Bf = d \Big\}$.

例 右図のネットワークを考えると B, dは

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix}.$$



✍ $Bf = d$ が実際に各ノードでの流出量 $-$ 流入量 $=$ 外生供給の表現となっていることを確認せよ.

有向閉路 (directed cycle) のない小ネットワーク

前頁のネットワークでは

$$f_1 + f_3 = Q, \quad -f_1 + f_2 = 0, \quad -f_2 - f_3 = -Q.$$

$f_1 = t$ とおけば K は**フロー多面体** (flow polytope) $\boxed{f(t) = (t, t, Q - t), \quad 0 \le t \le Q}$

$(0, 0, Q)$：直通のみ　　$(Q, Q, 0)$：v 経由のみ



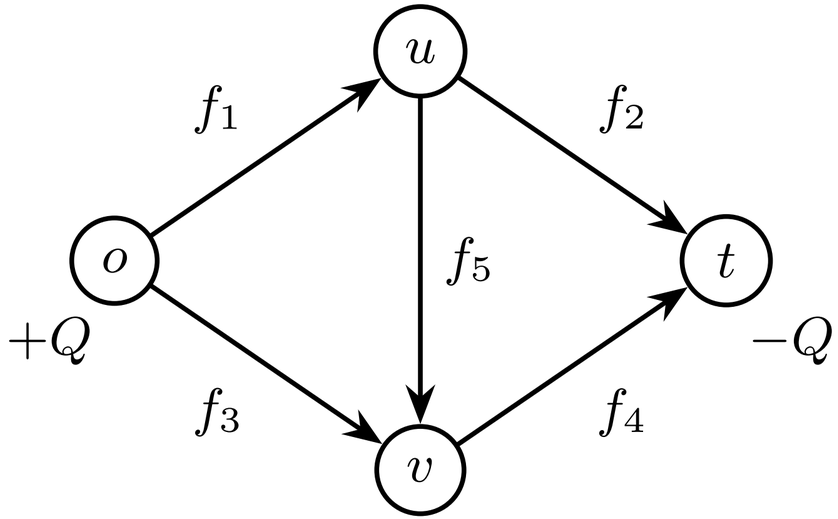
方向 $h = s(1, 1, -1)$ は $Bh = \mathbf{0}$ を満たす

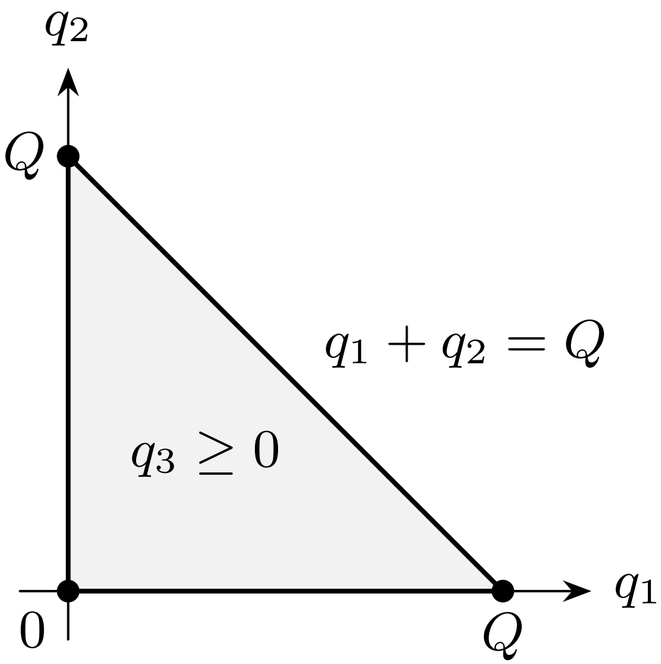
（$\Longleftrightarrow$ Bの **核空間** (kernel) に属す）

✍ 3本の保存則のうち1本は冗長．この例の実行可能フロー集合は $3 - 2 =$ **1次元多角形**.

Braess ネットワーク：2次元のフロー多面体

需要 $Q > 0$. 上側・下側・中央経由の **経路フロー** を $q_1, q_2, q_3 \geq 0$ とする.



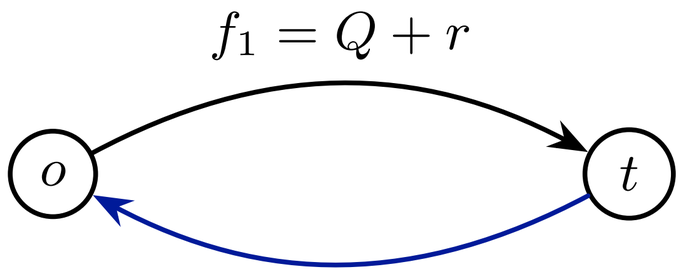


$q_1 + q_2 + q_3 = Q$ より，リンク・フローは $f = (q_1 + q_3,\ q_1,\ q_2,\ q_2 + q_3,\ q_3)$.

✍ 右の三角形 $\{(q_1, q_2) \geq 0 : q_1 + q_2 \leq Q\}$ と K は一対一対応. $\operatorname{rank} B = 3$ より $\dim K = 5 - 3 = 2$.

有向閉路のある小ネットワーク

固定需要でも**閉路** (cycle) があると保存則を保ったまま無限にフローを増やせる.



$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 - f_2 = Q.$$

$$f(r) = (Q + r, r), \quad r \geq 0.$$

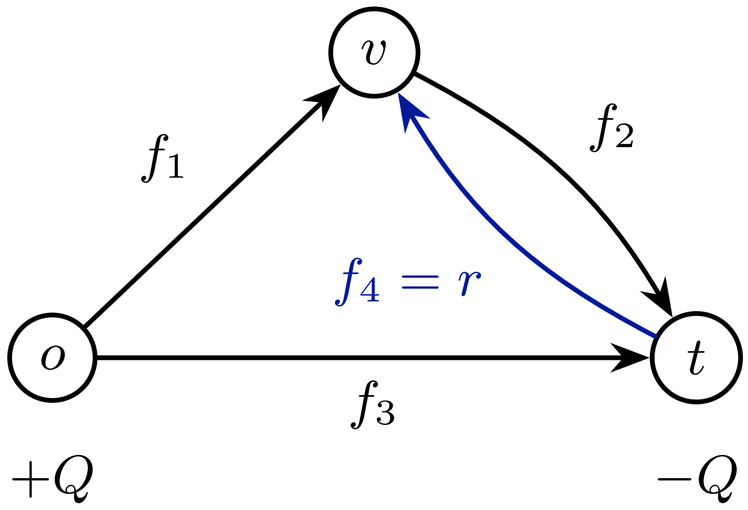
$h = (1, 1)$ は $h \geq 0,\ Bh = \mathbf{0}$ を満たす

$\Rightarrow$ $f + rh$ は任意の $r \geq 0$ で実行可能.

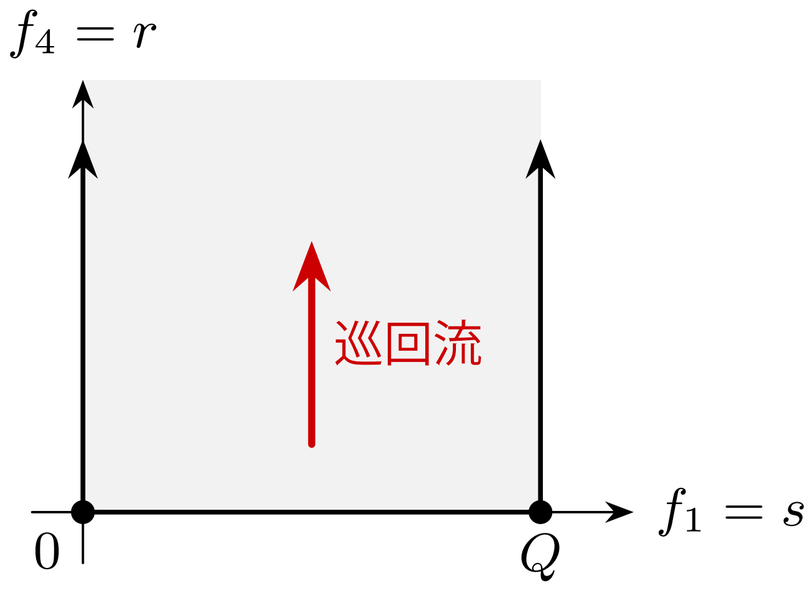


逆向きリンクありの三角ネットワーク

需要 $Q > 0$．$f_2 : v \to t$ の逆向きリンク $f_4 : t \to v$ を追加する．



（$v \to t \to v$ が有向閉路）



$f_1 = s$，$f_4 = r$ とおくと，保存則から $f(s, r) = (s,\ s + r,\ Q - s,\ r)$ $(0 \le s \le Q,\ r \ge 0)$.

✍ $\dim K = 4 - 2 = 2$．K は非有界な多面体．閉路を表現する $h = (0, 1, 0, 1) \ge \mathbf{0}$ は $Bh = \mathbf{0}$ を満たし，任意の $\rho \ge 0$ で $f + \rho h \in K$.

許容フロー集合の有界性

非空な多面体 K に対して，無限に伸ばせる方向の集合 (**recession cone**) を $\operatorname{rec} K$ と書く．一般に K **が有界** $\iff \operatorname{rec} K = \{\mathbf{0}\}$.

- **容量制約なし**：$K = \{f \geq 0 : Bf = d\}$ に対して，

$$\operatorname{rec} K = \{h \geq 0 : Bh = \mathbf{0}\}.$$

  右辺は非負循環流の集合．有限ネットワークでは，

$$K \text{ が有界} \iff \text{有向閉路が存在しない.}$$

- **容量制約あり**：$K_{\mathrm{cap}} = \{f : Bf = d,\ \mathbf{0} \leq f \leq \bar{f}\}$，$\bar{f} < \infty$（成分ごと）とすると，

$$\operatorname{rec} K_{\mathrm{cap}} = \{h : Bh = \mathbf{0},\ h \geq \mathbf{0},\ h \leq \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

  よって，有向閉路の有無によらず有界な多面体，すなわち多角形となる.

単体と保存則を満たすフロー集合

統一的に表示可能：

$K = \{z \geq 0 : Az = b\}$，$z \in K$ なら

$$T_K(z) = \{h : Ah = 0,\ h_i \geq 0\ (z_i = 0)\}\,,$$
$$N_K(z) = \left\{A^\top \lambda - \mu : \lambda \text{ は自由},\ \mu \geq 0,\ \mu_i z_i = 0\ \forall i\right\}.$$

- 等式制約 $Az = b$：法線は $A^\top \lambda$，係数 λ の符号は自由.
- 非負制約 $-z_i \leq 0$：有効な成分に対する外向き法線 $-e_i$，対応する係数 $\mu_i \geq 0$.
- 単体は $A = \mathbf{1}^\top$，flow は $A = B$ なるケース.

✍ **線形制約** ゆえ冗長な等式があってもこの表示は成立．非線形制約での制約想定とKKTは第3講で扱う.

ここまでに登場した許容集合の比較

集合	閉・凸	有界	方向空間／注意
Δ_n	✓	✓	$\langle \mathbf{1}, h \rangle = 0$，次元 $n-1$
$\mathbb{R}^n_{\geq 0}$	✓	×	全空間と同じ次元
2×2 輸送（各量1）	✓	✓	行和・列和ゼロ，次元1
$\{f \geq \mathbf{0} : Bf = d\}$	✓	場合による	非負循環流があれば非有界

- 複数集団 $X = \prod_p m^p \Delta_{n^p}$：コンパクト・凸，次元 $\sum_p (n^p - 1)$.
- 利得関数で表現される相互作用はゲームに依存するが許容集合の幾何は共通.

✍ 等式制約 $Az = b$ の解空間の次元は $n - \operatorname{rank} A$．非負制約 $z \geq \mathbf{0}$ のもとで次元がさらに下がる場合がある．ただし，$Az = b$ を満たす $z > \mathbf{0}$ （非負制約がすべて非活性となる点）が存在すれば次元は変わらない.



まとめ

問 まとめクイズ

1. $x = (1/2, 1/2, 0) \in \Delta_3$ で，次のうち接方向はどれか.

$$h^{\mathrm{A}} = (1, -1, 0), \quad h^{\mathrm{B}} = (0, 1, -1), \quad h^{\mathrm{C}} = (-1, 0, 1).$$

2. $x \in \operatorname{ri}\Delta_3$ に対して $N_{\Delta_3}(x) = \{\mathbf{0}\}$ は誤っているが，なぜか．平面内への射影を使って正しく言い直せ.

3. $f \geq 0,\ Bf = d$ を満たす候補が見つかった．それだけで集合がコンパクト／候補が均衡と言えるか.

問 まとめクイズ回答

1. A と C．全て総量は保つが，B は $x_3 = 0$ から成分3を減らす．
2. 全空間では $N_{\Delta_3}(x) = \mathrm{span}\{\mathbf{1}\}$．
   $L = \{h : \langle \mathbf{1}, h \rangle = 0\}$ 内では $PN_{\Delta_3}(x) = \{\mathbf{0}\}$．
3. いずれも言えない．閉路上の循環流は有界性を破り得る．
   均衡の判定には F と法錐の照合がさらに必要．

次回予告：KKT条件・双対性

第3講では最適化問題を均衡問題の特殊形 $F = \nabla f$ として解釈する.

- $-\nabla f(x) \in N_K(x)$ はいつ大域最適性を保証するか.
- 法錐の成分表示から **KKT条件・相補性条件** が従うことをみる.
- フローの等式制約の Lagrange 乗数（**ノード・ポテンシャル**）を議論する.
- 主・双対の実行可能性と双対性ギャップを議論する.





付録

多面体の接錐と有効制約

$K = \{z : Az = b,\ Cz \leq d\}$，**有効制約集合** $I(z) = \{i : C_i z = d_i\}$ とする．

$$T_K(z) = \{h : Ah = 0,\ C_i h \leq 0\ (i \in I(z))\}.$$

必要性：実行可能な $z + th$ を等式・有効不等式に代入し，$t > 0$ で割る．

十分性：有効な不等式は保たれる．有効ではない不等式は有限本であり，全て正の余裕を持つので，十分小さな $t > 0$ なら全て保たれる．

$$N_K(z) = \left\{ A^\top \lambda + \sum_{i \in I(z)} \mu_i C_i^\top : \lambda \text{ 自由},\ \mu_i \geq 0 \right\}.$$

法錐の表示は接錐の極錐を取ると得られる（**Farkasの補題**）．非負制約では $C_i = -e_i^\top$ なので法線の符号は負．

非有界なフロー集合と非負循環流

非空な $K = \{f \geq 0 : Bf = d\}$ を考える.

- $h \geq 0,\ Bh = \mathbf{0},\ h \neq 0$ があれば $f + rh \in K$（$r \geq 0$）なので非有界.
- 逆に非有界なら，$f^k \in K,\ \|f^k\| \to \infty$ を選べる．単位ベクトル $h^k = f^k/\|f^k\|$ の収束部分列について

$$h \geq 0, \quad \|h\| = 1, \quad Bh = \lim_k \frac{d}{\|f^k\|} = \mathbf{0}.$$

従って正の循環流が存在する.

有限有向グラフの非ゼロの非負循環流では，正の流量を持つリンクを辿ると，保存則により必ず次のリンクへ進める．ノード数が有限なので **有向閉路** が現れる.

✍ グラフが有向非巡回ならそのような h はない．逆に有向閉路があればその閉路上の単位循環流を取れる.

一般の輸送多面体の次元と非空性

より一般に，m 産地・n 需要地の全ての組に輸送可能，$a_i > 0,\ b_j > 0$,
$\sum_i a_i = \sum_j b_j = M$ とする.

$$K = \{X \geq \mathbf{0} : X\mathbf{1} = a,\ X^\top \mathbf{1} = b\}.$$

- $x^0_{ij} = a_i b_j / M > 0$ は実行可能：**非空**で，かつ相対内部を持つことがわかる.
- 保存則の独立な本数は $m + n - 1$. 従って

$$\dim K = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1).$$

- $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$ より明らかに有界なので **コンパクト**.

✍ 禁止された輸送リンクやゼロの需要・供給がある場合，次元や非空性はこの式だけでは判断できない.

高次元に埋め込まれた低次元許容領域の法錐

凸集合 K，$L = \operatorname{span}(K - K)$，$x \in K$．任意の $y - x$ は L に属するので

$$\langle v, y - x \rangle = \langle Pv, y - x \rangle.$$

従って

$$N_K(x) = (N_K(x) \cap L) + L^{\perp}, \qquad PN_K(x) = N_K(x) \cap L.$$

特に $x \in \operatorname{ri} K$ なら，L の各方向について微小な正負の移動が可能.

$$T_K(x) = L, \qquad N_K(x) = L^{\perp}, \qquad N_K^L(x) = \{\mathbf{0}\}.$$

✍ $N_K(x) = \{\mathbf{0}\}$ と言えるのは，$L = \mathbb{R}^n$ となる **全次元の集合の内点** の場合.