

2026後期

均衡分析と数理最適化

オリエンテーション

京都大学経済研究所 大澤 実

本講義の目的

計算可能な**均衡モデル**を体系的に構築・解析するための方法論を学ぶ。

1. **定式化**：経済・ゲームのモデルを適切な**問題クラス**を通じて解釈する。
(最適化問題・相補性問題・変分不等式問題・不動点問題)
2. **構造**：問題の定性的性質が 計算する前に 何を予言できるかを知る。
(単調性・凸性・ポテンシャル構造・双対性)
3. **検証**：得られた「均衡」が本当に均衡であることを，どう保証できるかを知る。

一見異なる経済・ゲームのモデルたちを共通の構造を通じて理解できる視点を獲得し，自分で探索できるモデルの空間を広げる武器を得ることをねらう。

考え方：LLM 時代における構造的理解の意義

LLM，とりわけ Agentic AI の登場により，均衡分析の一部は安価になった：標準的なアルゴリズムの実装，数学からコードへの翻訳，データの前処理や数値実験の実行．

一方で，（今のところ）次の能力は むしろ希少に なっている．

- **定式化**：モデルをどの問題クラスに落とすかの判断．誤った定式化は，エージェントによって **常にもっともらしく実装される**．
- **検証**：出力された結果を信頼してよいかの判定．生成されたコード・数値は **“plausibly wrong”** が常態．検証コストが発散しつつある．
- **構造を表現する語彙**：「これは単調な変分不等式問題だから解は一意」のような語彙は，Agentic AI を効果的に・責任を持って活用するための **基礎言語**．

到達目標

1. 経済・ゲームのモデルを基本的な問題クラス **(N)LP**・**(N|L|mi)CP**・**VI**・**FXP** の間で翻訳し，各表現の前提と利点を説明できる．
2. 許容集合 K の幾何とベクトル場 F の構造から，性質を 計算前に 予測できる．
3. **均衡の存在・安定性・数値解法の収束性**を区別して・関連づけて議論できる．
4. 具体的なモデルに対して以下を実行できる：
 - (K, F, θ) を同定し，適切な問題クラスとして定式化する．
 - 数値解法を選び，必要な仮定と停止条件を説明する．
 - 解を独立に検証し，反実仮想・介入設計へ進む．

この講義が主に対象とする問題

均衡問題を表現する次の**変分包含式** (variational inclusion) :

$$\mathbf{0} \in F_{\theta}(x) + N_K(x)$$

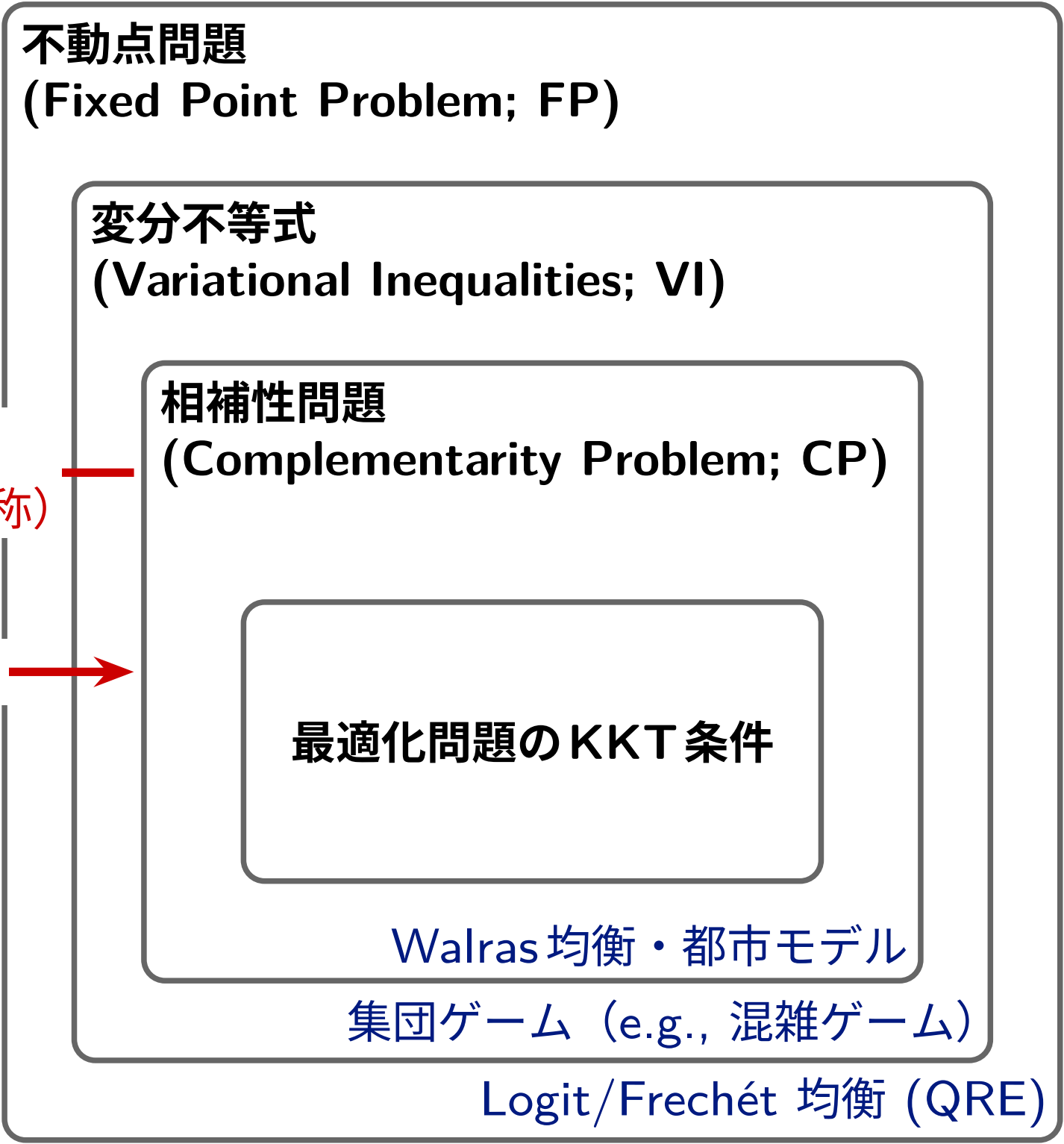
一階条件 (「微分してゼロ ($\nabla f(x) = \mathbf{0}$)」) の一般化

- $x \in \mathbb{R}^n$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$
- K : 単体・多面体・非負錐などの有限次元の**許容集合** (feasible set)
- N_K : K の**法線錐** (normal cone)
- F_{θ} : 利得関数・費用関数・市場清算条件などが作る**ベクトル場**
- θ : ベクトル場を特徴づける所与の定数 (環境・技術・政策・推定対象)

本講義で触れる問題クラス

最適化問題：単一の目的関数 f

均衡問題：ベクトル場 F （誰の目的関数でもない）



$F = \nabla f$
(可積分=対称)

KKT 条件

動学的拡張
(Bellman方程式)

----->

F の単調性 $\approx f$ の凸性
($\Rightarrow$ 一意性・数値解法の収束性)

取り扱う具体的な題材

1. 3行動集団ゲーム (population game) :

単体上の最適応答・logit 選択・Nash VI・ポテンシャルゲーム・学習動学

2. ネットワーク・フロー (network flows) :

最小費用流と双対性・Wardrop VI・混雑料金・Frank–Wolfe アルゴリズム

3. グラフ上の立地ゲーム :

2地点・多地点モデルにおける集積・分散 (グラフの固有モードと定常解の分岐)

4. 重力モデル (gravity model) と空間一般均衡分析 :

市場清算のNCP/FP・計算アルゴリズム・定量空間経済モデル (QSMs)

講義の暫定的な予定 (1/2)

第I部 基礎編 (第1～5回)

- (1) 概論 (基本的な変分包含問題と4つのモデル)
- (2) 許容集合の幾何：単体・錐・多面体
- (3) 均衡問題の特殊形としての最適化問題：凸性・KKT条件・双対性
- (4) 均衡問題の様々な同値表現：(N|L)CP・VI・FP
- (5) ベクトル場の構造：単調性・ポテンシャル構造

第II部 均衡の挙動と数値解法 (第6～8回)

- (6) 均衡と近視眼的動学：安定性と分岐
- (7) 数値解法：射影勾配法・鏡映勾配法・Frank–Wolfe 法
- (8) 積分不可能なVI

講義の暫定的な予定 (2/2)

第III部 具体的な均衡問題 (第9～13回)

- (9) 3戦略集団ゲーム：学習と均衡選択・非収束性
- (10) ネットワーク・フロー：最短経路探索・混雑ゲーム・混雑課金
- (11) グラフ上の空間集積：グラフの固有モードと分岐
- (12) 重力モデルと空間一般均衡 ①：均衡の構造
- (13) 重力モデルと空間一般均衡 ②：反実仮想分析

第IV部 政策設計 (第14～15回)

- (14) 均衡の設計・逆問題・メカニズムデザイン
- (15) 発表 or 口頭試問

参考文献

主に底本とする予定の書籍.

- [1] 寒野・土谷『東京大学工学教程 最適化と変分法』
- [2] 福島『新版 数理計画入門』『非線形最適化の基礎』
- [3] Boyd & Vandenberghe『Convex Optimization』
- [4] 土木学会『交通ネットワークの均衡分析』
- [5] Sandholm『Population Games and Evolutionary Dynamics』（集団ゲーム）
- [6] Facchinei & Pang『Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems』（VIの基礎・メリット関数法）

成績評価

- **講義中のクイズ**（10%）：概念理解・定式化を問う．その場で解答．
- **期末レポート**（90%）：均衡モデルを一つ選び，定式化・理論分析・数値実験を行う．内容について口頭で確認することがある．受講者数によっては，期末レポートにかえて受講者による**論文紹介**（プレゼンテーション形式）とする．

AI利用ポリシー

- Agentic AI など生成 AI の利用は**前提**とする．コード生成・文献調査・文章の添削などに自由に利用してよい．
- 提出物の正しさを検証する責任は学生にある．AI出力を十分検証せずに転記したことによる誤りは，通常の誤りより重く評価する．
- 期末レポートには，使用したAIツールと主な用途を1段落で記載すること．
(どう指示し，出力のどこを疑い，どう確かめたかは，それ自体が評価対象)